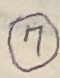


Del M- 43.4 al M- 49.1

MODELOS CORPÓREOS

	MODELOS CORPÓREOS	Modelo M - 43.4

EJECUTADO

VARIANTE DEL MODELO M - 43.2, DE IGUAL FORMA QUE ÉSTE, SIENDO MÁS PEQUEÑO EL RADIO DE SU ESFERA CIRCUNSCRITA

Radio de la esfera circunscrita:

$r_{ec}^{XI} = 76.1$ mm.

UNE A4·210 x 297

	Ejercicios de construcción de poliedros MODELOS CORPÓREOS	Modelo M - 43.4

ENUNCIADO: Construir el modelo corpóreo del poliedro convexo de caras vaciadas "ARQUIMEDIANO XI", formado por doce caras cuadradas (C_4); ocho caras exagonales (C_6) y seis caras octogonales (C_8), concurriendo en cada vértice: $1C_4 + 1C_6 + 1C_8$

Este modelo puede considerarse como una variante del modelo M-43.2, de igual forma, pero siendo menor el radio de su esfera circunscrita ($r_{ec}^{XI} = 76.1$ mm < 110 mm)

Para obtener el despiezo de este modelo, utilizaremos el mismo estudio analítico hecho en el modelo M-43.2, determinando previamente el coeficiente "k" de reducción $k = 76.1 : 110$, o relación entre los radios correspondientes de sus respectivas esferas circunscritas.

DATO ÚNICO DE ESTE EJERCICIO

$$r_{ec}^{XI} = 76.1 \text{ mm}$$

COEFICIENTE DE REDUCCIÓN

$$k = \frac{76.1}{110} = 0,69\widehat{18}\ldots$$

		Modelo M- 43.4

PIEZA Nº 1 CARAS SUPERFICIALES CUADRADAS 12 unidades

La figura 1, ha de construirse con las siguientes cotas modificadas:

FIGURA Nº 1	Longitudes mm	Cotas modificadas mm
Pieza nº 1 12 (u)	47.5 4	32.8 3.0

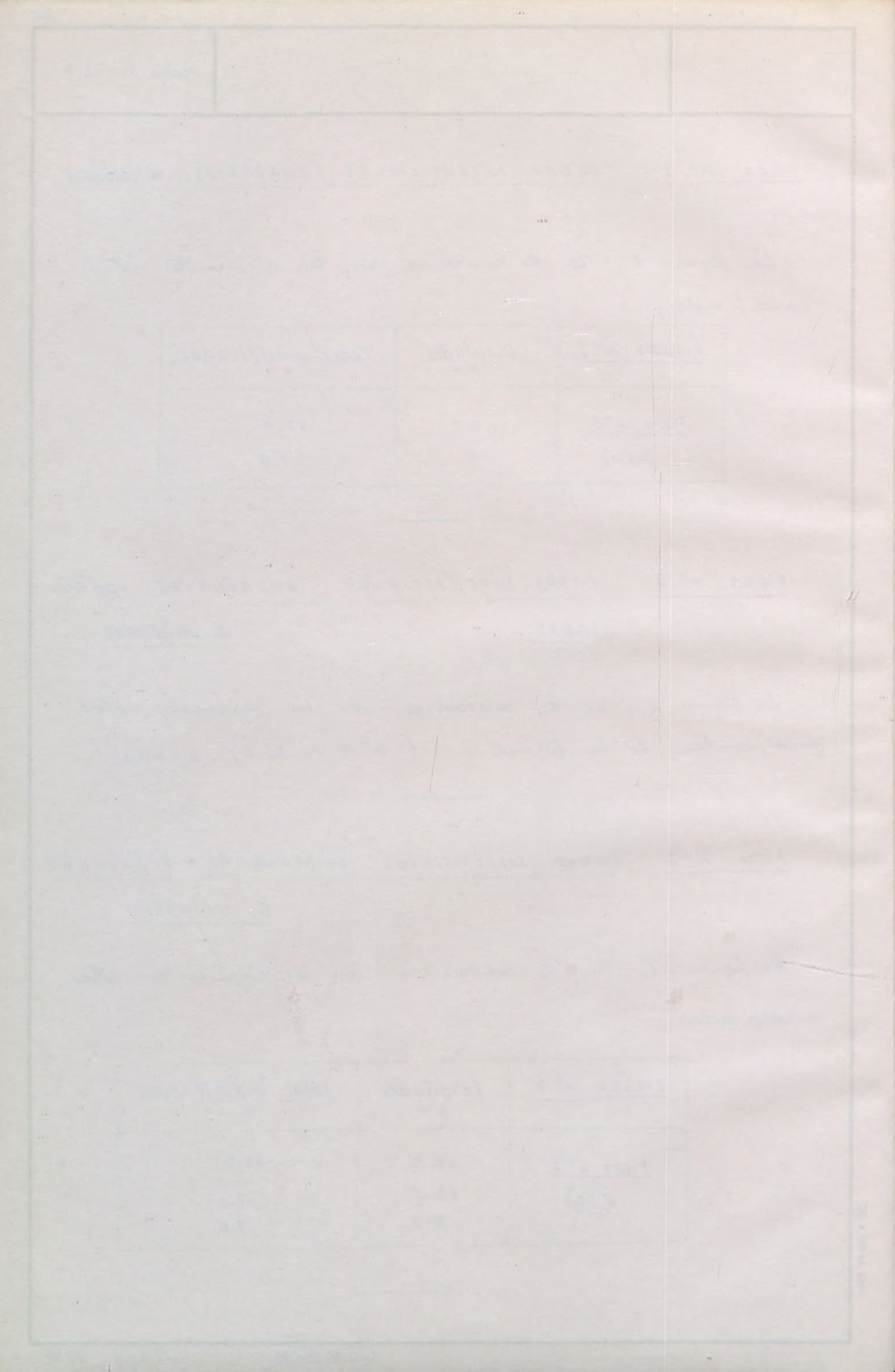
PIEZA Nº 2 CARAS SUPERFICIALES EXAGONALES REGULARES 8 unidades

La figura 2, ha de construirse con las mismas cotas modificadas de la figura 1 (47.5 → 32,8; 4 → 3,0)

PIEZA Nº 3 CARAS SUPERFICIALES OCTOGONALES REGULARES 6 unidades

La figura 3, ha de construirse con las siguientes cotas modificadas:

FIGURA Nº 3	Longitudes mm	Cotas modificadas mm
Pieza nº 3 6 (u)	47.5 62.2 4.0	32.8 43.0 3.0



Modelo M-43.4

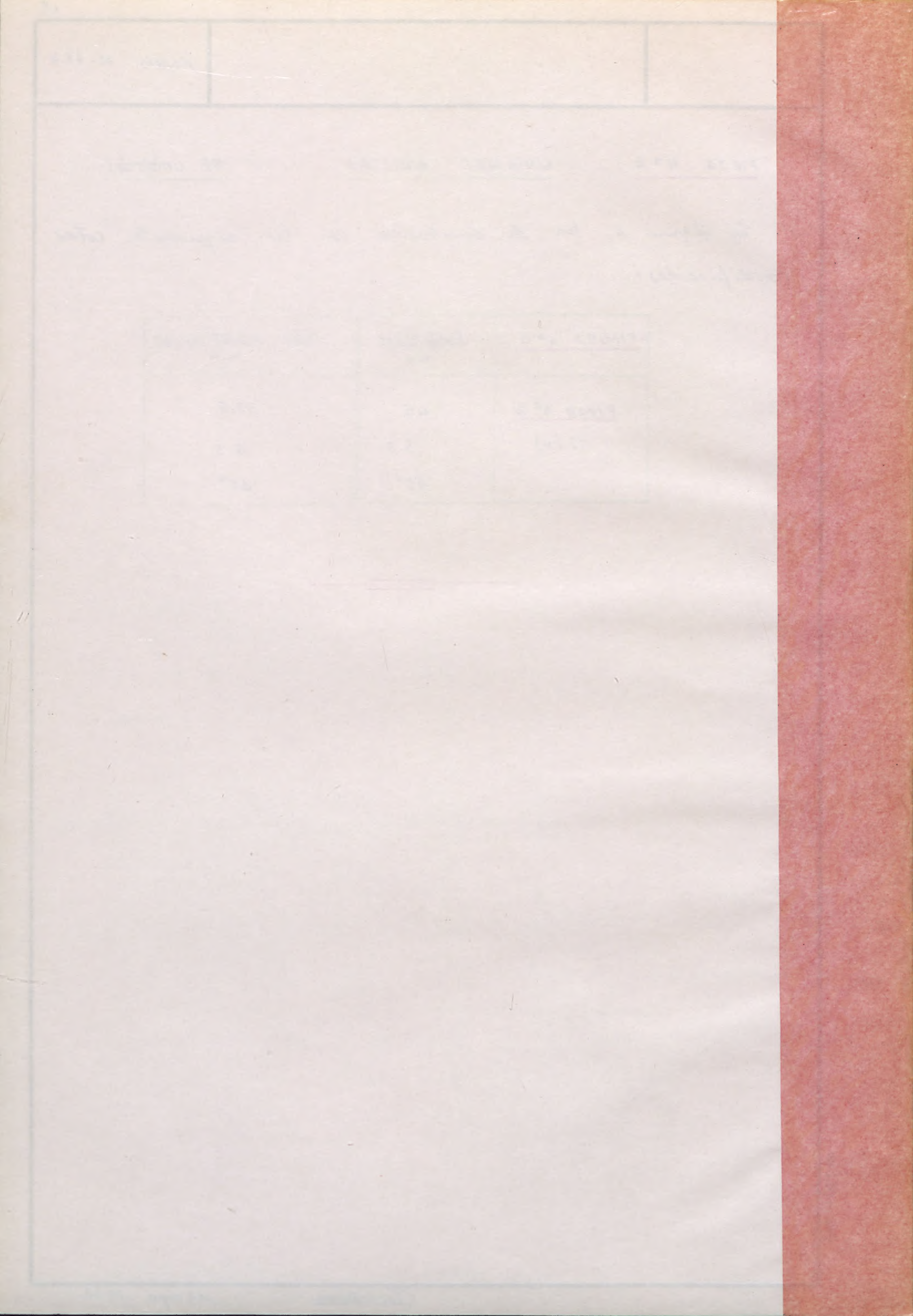
PIEZA Nº 4 UNIONES ARISTAS 72 unidades

La figura 4, ha de construirse con las siguientes cotas modificadas:

FIGURA nº 4	Longitudes mm	Cotas modificadas mm
Pieza nº 4	46	32.5
72 (u)	3,5	2.5
	45°	45°

Calvarez Mayo 1982

UNE A4 210 x 297



EJECUTADO

MODELO CORPÓREO DEL "ARQUIMEDIANO XI" OBTENIDO POR TRUNCADURA PARALELA DE ARISTAS DE UN EXAEDRO REGULAR CONVEXO, DE ARISTA "a_6", A LA DISTANCIA "$y = \frac{4-\sqrt{2}}{14} a_6$", SEGUIDA DE UNA TRUNCADURA DE VÉRTICES (O VICEVERSA), A LA DISTANCIA "$x = \frac{12-3\sqrt{2}}{14} a_6$", AL TOMAR SOBRE CADA ARISTA, Y DESDE SU VÉRTICE, LAS DISTANCIAS "y" Y "x" RESPECTIVAMENTE. EL ARQUIMEDIANO OBTENIDO, SE CONSTRUIRÁ CON LAS CARAS MACIZAS, Y EL EXAEDRO REGULAR CONVEXO GENERADOR, CON LAS CARAS VACIADAS.

Radio de la esfera circunscrita al exaedro regular

$r_{ec}^{6} = 110$ mm.

UNE A4 210 x 297

ENUNCIADO: Construir el modelo corpóreo del "ARQUIMEDIANO XI", obtenido por "Truncadura paralela de aristas" de un exaedro regular convexo de arista "a_6", a la distancia "$y = \frac{4-\sqrt{2}}{14} a_6$", seguida de una truncadura de vértices (o viceversa), a la distancia "$x = \frac{12-3\sqrt{2}}{14} a_6$", al tomar sobre cada arista, y desde su vértice, las distancias "y" y "x" respectivamente. El Arquimediano obtenido, se construirá con las caras macizas, y el exaedro regular convexo generador, con las caras vaciadas.

DATO ÚNICO DE ESTE EJERCICIO: r_{ec}^6 = Radio de la esfera circunscrita al exaedro generador:

$$r_{ec}^{6} = 110 \text{ mm}$$

1) GENERALIDADES

En el ESTUDIO PREVIO al modelo M- 42.9, desarrollamos y aplicamos una variante al proceso geométrico denominado "TRUNCADURA PARALELA DE ARISTAS", seguida de una "TRUNCADURA DE VÉRTICES" (o viceversa) de un poliedro regular convexo, diferente al estudiado en el ejercicio M - 35.10.

Esta nueva aplicación de dicho proceso, da lugar tam-

UNE A4 210 x 297

bién a la formación de un poliedro núcleo convexo, cuyas características geométricas, detallamos en el párrafo 4 del ejercicio previo al modelo M-42.9. En el caso especial descrito en este enunciado, dicho poliedro núcleo es un ARQUIMEDIANO.

Las características geométricas de este Arquimediano, serán pues las siguientes:

a) Los planos secantes "π_1" de la truncadura paralela de aristas, y los "π_2" de la de vértices, dan lugar a la formación de seis octógonos regulares de lado "$l_8 = a_A$", situados en las caras del exaedro generador.

b) Igualmente dichos planos "π_1" y "π_2", formarán con sus mutuas intersecciones, ocho exágonos regulares de lado "$l_6 = a_A$", asociado a cada vértice.

c) Los planos secantes "π_1" producen a su vez doce cuadrados paralelos a cada arista de P_6, situados en "π_1" y de lado "$l_4 = a_A$".

Por consiguiente, el poliedro núcleo estará limitado por SEIS CARAS OCTOGONALES REGULARES, OCHO CARAS EXAGONALES REGULARES Y DOCE CARAS CUADRADAS, todas de igual lado.

Estas son las características geométricas del ARQUIMEDIANO XI, estudiado y representado en el ejercicio G.E. nº---- - Lámina 43, que detallamos a continuación.

UNE A4 210 x 297

Álvarez Mayo 1985

ARQUIMEDIANO XI

1) Número de caras cuadradas .... $C_4 = 12$

2) Número de caras exagonales .... $C_6 = 8$

3) Número de caras octogonales .... $C_8 = 6$

4) Número de vértices $= \dfrac{12 \times 4 + 8 \times 6 + 6 \times 8}{3} = $ ...... $V = 48$

5) Número de aristas $= \dfrac{12 \times 4 + 8 \times 6 + 6 \times 8}{2} = $ ...... $A = 72$

6) Número de caras en cada vértice $= $ ... $1\,C_4 + 1\,C_6 + 1\,C_8$

---

2) POSICIÓN DE LOS PLANOS SECANTES "π_1" Y "π_2"

La posición de los planos secantes "π_1" con los que se obtiene la "Truncadura paralela de aristas" y la de los "π_2" para la "Truncadura de vértices" con respecto al poliedro generador, se obtiene mediante las distancias "y" y "x" respectivamente, tomadas sobre las aristas y a partir de sus vértices. Para su determinación se han obtenido en el EJERCICIO PREVIO al modelo M-42.9, fórmulas generales que aplicaremos a este ejercicio.

2.1) Distancia "y" que fija la posición del plano "π_1" en la Truncadura paralela de aristas

Se obtiene, en función de la arista "a_6" del poliedro generador, de la fórmula general (2) del modelo M-42.9

$$y = \frac{r_{ci}^{p} - r_{ci}^{2p}}{\operatorname{sen} \beta} \qquad (2)$$

En esta fórmula sustituiremos los valores generales de sus variables por los particulares siguientes, correspondientes al exaedro generado:

a) n = Número de caras del exaedro = 6

b) p = Número de lados del polígono de una cara del exaedro = 4

c) $r_{ci}^{p} = r_{ci}^{4}$ = Radio de la circunferencia inscrita al cuadrado de una cara del exaedro, de lado $l_4 = a_4$

d) $r_{ci}^{2p} = r_{ci}^{8}$ = Radio de la circunferencia inscrita al octógono regular de una cara del Arquimediano XI, de arista "a_{XI}"

e) β = Ángulo interior del cuadrado de una cara del exaedro $= \frac{180° \times (4-2)}{4} = 90°$

De estos valores, se deduce:

f) $\boxed{\operatorname{sen} \beta} = \operatorname{sen} 90° = \boxed{1}$

g) $\boxed{r_{ci}^{p}} = r_{ci}^{4} = \boxed{\frac{1}{2} a_6}$ (Ver (1) G.P. 1400-43)

h) $r_{ci}^{2p} = \boxed{r_{ci}^{8}} = \frac{\sqrt{2}+1}{2} a_{XI} = \frac{\sqrt{2}+1}{2} \times \frac{2\sqrt{2}-1}{7} a_6 = \frac{(\sqrt{2}+1)(2\sqrt{2}-1)}{14} a_6 =$

$= \frac{4 + 2\sqrt{2} - \sqrt{2} - 1}{14} a_6 = \boxed{\frac{3+\sqrt{2}}{14} a_6}$ (Ver G.P. (2) 1.400-43)

(El valor de "$a_{x1} = \frac{2\sqrt{2}-1}{7} a_6$" se deduce posteriormente en el párrafo 3.21).

Sustituyendo los valores f), g) y h) en (2), tendremos:

$$y = \left(\frac{1}{2} a_6 - \frac{3+\sqrt{2}}{7} a_6\right) : 1 = \left(\frac{1}{2} - \frac{3+\sqrt{2}}{7}\right) a_6 = \frac{7-3-\sqrt{2}}{14} a_6 = \boxed{\frac{4-\sqrt{2}}{14} a_6}$$

de donde se obtiene finalmente

$$\boxed{y = \frac{4-\sqrt{2}}{14} a_6}$$

Este valor de "y" justifica el expresado en el enunciado.

2.2) Distancia "x" que fija la posición del plano "π_2" en la "Truncadura de vértices"

Se obtiene, en función de la arista "a_6" del poliedro generador, de la fórmula general (3) deducida en el EJERCICIO PREVIO al modelo M-42.9

$$\boxed{x = \frac{r_{ce}^{p} - r_{ci}^{2p}}{\cos \frac{\beta}{2}}} \qquad (3)$$

En esta fórmula sustituiremos los valores generales de sus variables, por los particulares siguientes, correspondientes al exaedro regular generador.

a) n = Numero de caras del exaedro = 6

b) $a_n = a_6$ = Arista del exaedro

c) p = Número de lados de los polígonos de las caras del escaedro generador = 4

d) $r_{cc}^{p} = r_{cc}^{4}$ = Radio de la circunferencia circunscrita al cuadrado de una cara del escaedro, de lado "a_6"

e) $r_{ci}^{2p} = r_{ci}^{8}$ = Radio de la circunferencia inscrita al octógono regular de una cara del Arquimediano XI, de arista "a_{XI}"

f) β = Angulo interior del cuadrado de una cara del escaedro $= \dfrac{180^\circ \times (4-2)}{4} = 90^\circ$

De estos valores se deduce:

g) $\boxed{\cos \dfrac{\beta}{2}} = \cos 45^\circ = \boxed{\dfrac{\sqrt{2}}{2}}$ (Ver G.P. 1006)

h) $r_{cc}^{p} = \boxed{r_{cc}^{4} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\, a_6}$ (Ver (*) G.P. 1.400-43)

i) $r_{ci}^{2p} = \boxed{r_{ci}^{8} = \dfrac{3+\sqrt{2}}{14}\, a_6}$ (Ver cálculo de "y")

Sustituyendo los valores g), h), i) en (3), tendremos:

$$\boxed{x} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}a_6 - \frac{3+\sqrt{2}}{14}a_6}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{3+\sqrt{2}}{14}\right) : \frac{\sqrt{2}}{2}\, a_6 = \frac{7\sqrt{2}-3-\sqrt{2}}{14} : \frac{\sqrt{2}}{2}\, a_6 =$$

$$= \frac{6\sqrt{2}-3}{14} : \frac{\sqrt{2}}{2}\, a_6 = \frac{6\sqrt{2}-3}{7\sqrt{2}}\, a_6 = \boxed{\frac{12-3\sqrt{2}}{14}\, a_6}$$ de donde se obtiene finalmente:

$$\boxed{x = \frac{12-3\sqrt{2}}{14}\, a_6}$$

UNE A4 210 x 297

[illegible] Mayo 1983

Este valor de "x" justifica el expresado en el enunciado

NOTA: Comparando los valores obtenidos para las magnitudes "x" e "y", se deduce fácilmente que

$$\boxed{x = 3y}$$

---

3) CONSTRUCCIÓN DE ESTE MODELO

Para la construcción de este modelo, son necesarias las siguientes piezas:

3.1) EXAEDRO REGULAR GENERADOR, DE CARAS VACIADAS

El valor de a_6 se obtiene de la fórmula "$r_{ec}^{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} a_6$" deducida en el ejercicio G.E. nº ---- - Lámina 2. Despejando en ella "a_6", será:

$$\boxed{a_6} = r_{ec}^{6} : \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{2}{\sqrt{3}} \times r_{ec}^{6} = \boxed{\frac{2\sqrt{3}}{3} r_{ec}^{6}}$$

PIEZA Nº 1 CARAS SUPERFICIALES CUADRADAS

6 unidades

Su forma y dimensiones son iguales a las de la figura 1 del ejercicio M-2.102

PIEZA Nº 2 UNIONES ARISTAS 12 unidades

Su forma y dimensiones son iguales a las de la figura 2 del ejercicio M- 2. 102

3.2) ARQUIMEDIANO XI (NÚCLEO DEL EXAEDRO GENERADOR), DE CARAS MACIZAS, INCLUIDO LAS PIRÁMIDES AUXILIARES DE FIJACIÓN DE LOS VÉRTICES DEL EXAEDRO GENERADOR A LAS CARAS EXAGONALES DEL ARQUIMEDIANO XI.

3.21) Longitud "a_{XI}" de la arista del ARQUIMEDIANO XI engendrado por el exaedro generador

Se obtiene, en función de la arista "a_6" del exaedro generador, de la fórmula (1) deducida en el ESTUDIO PREVIO al modelo M- 42.9

$$a_\Delta = \frac{\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\ \operatorname{sen}\varphi}{\operatorname{sen}\varphi\ \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{4} + 1}\, a_n \qquad (1)$$

En esta fórmula, sustituiremos los valores generales de sus variables por los particulares siguientes, correspondientes al exaedro regular convexo generador:

a) n = Número de caras del exaedro = 6

b) $a_n = a_6$ = Arista del exaedro

c) α = Ángulo central del cuadrado de una cara del tetraedro $= \frac{360°}{4} = 90°$

d) φ = Semiángulo del diedro formado por dos caras contiguas del icoaedro.

De estos valores se deduce:

e) $\boxed{\operatorname{sen} \varphi} = \operatorname{sen} 45^\circ = \boxed{\frac{\sqrt{2}}{2}}$ (Ver G.P. nº... Lámina 2)

f) $\boxed{\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}} = \operatorname{ctg} 45^\circ = \boxed{1}$ (Ver G.P. 1006)

g) $$\boxed{\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{4}} = \frac{\operatorname{sen} \frac{\alpha}{2}}{1 - \cos \frac{\alpha}{2}} = \frac{\operatorname{sen} 45^\circ}{1 - \cos 45^\circ} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{2-\sqrt{2}}{2}} =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}(2+\sqrt{2})}{2} = \frac{2\sqrt{2}+2}{2} = \boxed{\sqrt{2}+1}$$

Sustituyendo los valores e), f), g) en (1), tendremos:

$$\boxed{a_{x1}} = \frac{1 \times \frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{2}+1)+1} a_6 = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{1 + \frac{\sqrt{2}}{2} + 1} a_6 = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{2 + \frac{\sqrt{2}}{2}} a_6 =$$

$$= \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{4+\sqrt{2}}{2}} a_6 = \frac{\sqrt{2}}{4+\sqrt{2}} a_6 = \frac{\sqrt{2}(4-\sqrt{2})}{14} a_6 = \frac{4\sqrt{2}-2}{14} a_6 =$$

$$= \boxed{\frac{2\sqrt{2}-1}{7} a_6}$$

Puede obtenerse "a_{x1}" en función de r_{ec}^6 (dato de este modelo), sustituyendo el valor de "$a_6 = \frac{2\sqrt{3}}{3} r_{ec}^6$", obtenido en el párrafo 3.1 de este ejercicio.

Así pues, tendremos:

UNE A4 210 x 297

Alvarez   Mayo 1982

Modelo N-43.5

$$\boxed{a_{x1}} = \frac{2\sqrt{2}-1}{7}\, a_6 = \frac{2\sqrt{2}-1}{7} \times \frac{2\sqrt{3}}{3}\, r_{ee}^{6} = \frac{(2\sqrt{2}-1)\times 2\sqrt{3}}{21}\, r_{ee}^{6} =$$

$$= \boxed{\frac{4\sqrt{6}-2\sqrt{3}}{21}\, r_{ee}^{6}}$$

El valor numérico de a_{x1}, será pues:

$$\boxed{a_{x1}} = \frac{4\sqrt{6}-2\sqrt{3}}{21}\, r_{ee}^{6} \cong 0{,}30\,16\,12\,25\,5\ldots \times 110 \cong \boxed{33{,}2 \quad mm}$$

PIEZA Nº 3 CARAS SUPERFICIALES CUADRADAS 12 unidades

La forma y dimensiones se detallan en la figura 1

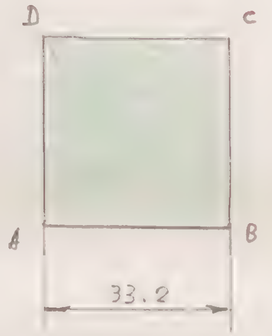


Figura 1

PIEZA Nº 3 12 (u)

Figura 1

PIEZA Nº 4 CARAS SUPERFICIALES EXAGONALES REGULARES

8 unidades

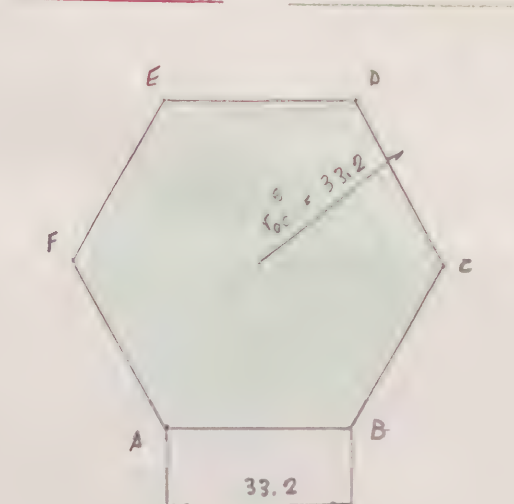


Figura 2

La forma y dimensiones se detallan en la figura 2

PIEZA Nº 4 8 (u)

Figura 2

UNE A4 210 x 297

Modelo M-43.5

PIEZA Nº 5 CARAS SUPERFICIALES OCTOGONALES REGULARES

6 unidades

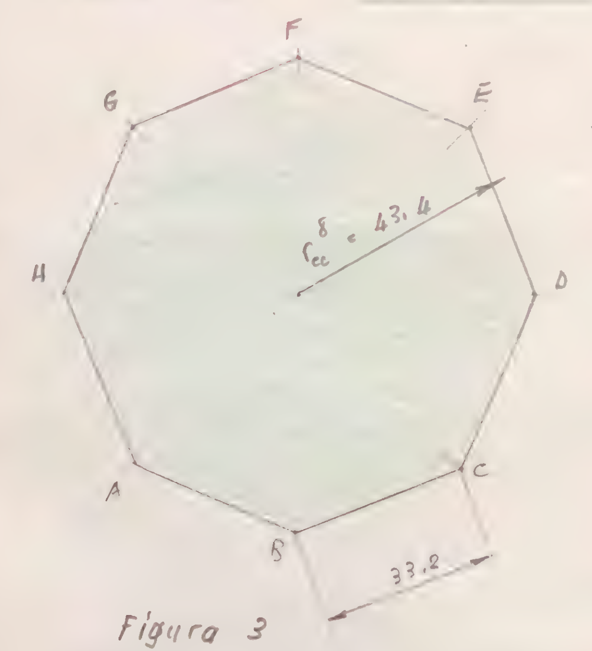


Figura 3

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 3

$C_{cc}^{8} = 1,3065 \times 33.2 = 43.4$ mm

PIEZA Nº 5 6 (u)

Figura 3

PIEZA Nº 6 REFUERZO NORMAL EN CARAS CUADRADAS

12 unidades

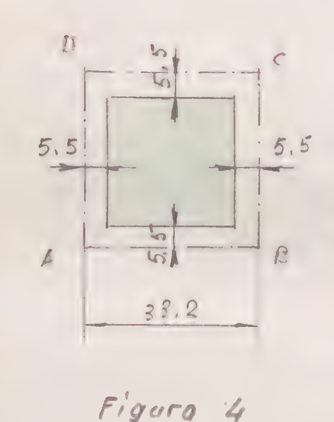


Figura 4

Su forma y dimensiones se deducen de las del cuadrado ABCD de la figura 1, y se detallan en la figura 4

PIEZA Nº 6 12 (u)

Figura 4

PIEZA Nº 7 REFUERZO NORMAL EN CARAS EXAGONALES REGULARES

8 unidades

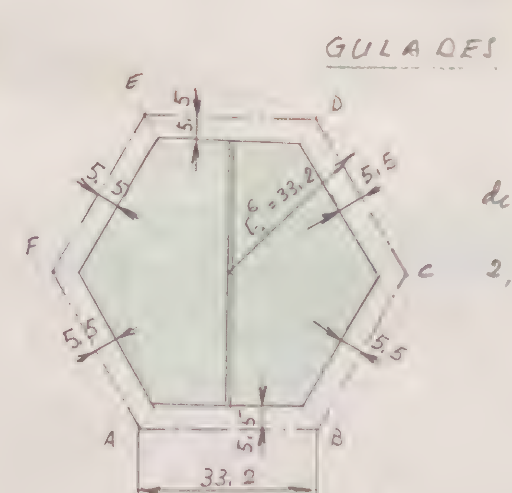


Figura 5

Su forma y dimensiones se deducen de las del exágono ABCDEF de la figura 2, y se detallan en la figura 5

PIEZA Nº 7 8 (u)

Figura 5

Mayo 1985

Modelo M - 43,5

PIEZA Nº 8 REFUERZO NORMAL EN CARAS OCTOGONALES REGULARES 6 unidades

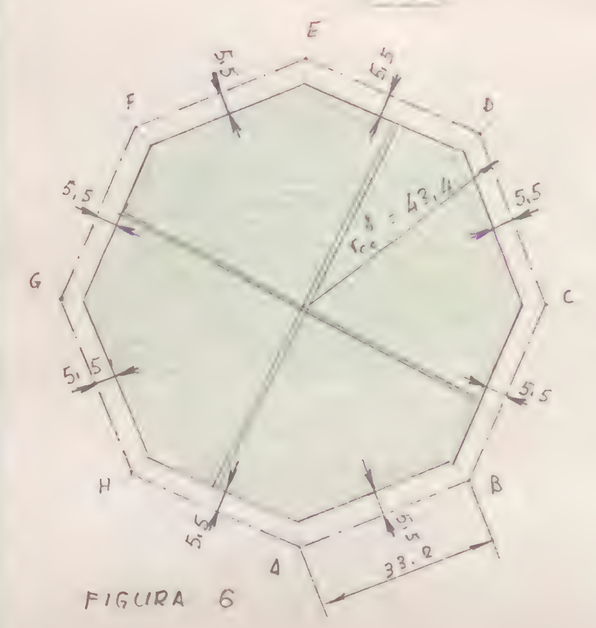


FIGURA 6

Su forma y dimensiones se deducen de las del octógono ABCDEFGH de la figura 3, y se detallan en la figura 6.

PIEZA Nº 8 6 (u)

Figura 6

PIEZA Nº 9 REFUERZO NORMAL EN CARAS EXAGONALES REGULARES. 16 unidades

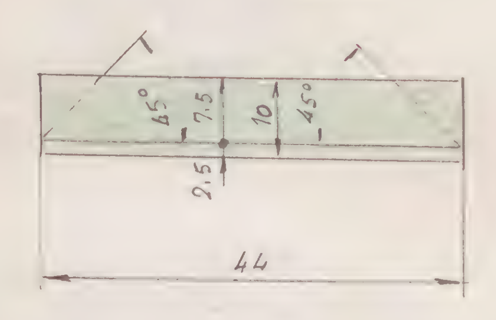


Figura 7

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 7; su colocación en la figura 5.

PIEZA Nº 9 16 (u)

Figura 7

PIEZA Nº 10 REFUERZO NORMAL EN CARAS OCTOGONALES REGULARES 24 unidades

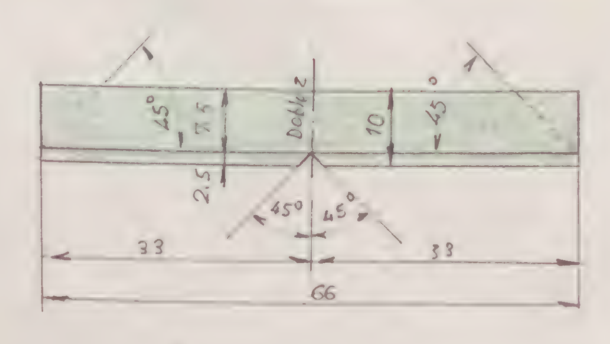


Figura 8

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 8; su colocación, en la figura 6

PIEZA Nº 10 24 (u)

Figura 8

UNE A4 210 x 297

Modelo M-43.5

PIEZA Nº 11 UNIONES ARISTAS 72 unidades

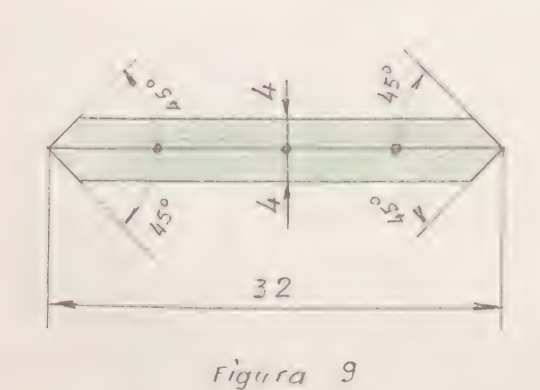


Figura 9

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 9

PIEZA Nº 11 72 (u)

Figura 9

PIEZA Nº 12 FORRO COLOREADO EN CARAS CUADRADAS

12 unidades

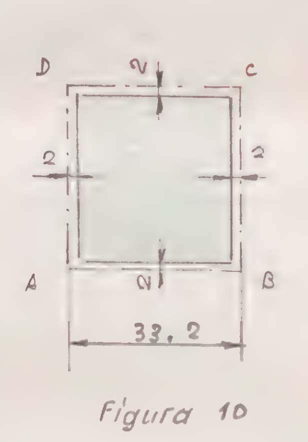


Figura 10

Su forma y dimensiones se deducen de las del cuadrado ABCD de la figura 1, y se detallan en la figura 10

PIEZA Nº 12 12 (u)

Figura 10

PIEZA Nº 13 FORRO COLOREADO EN CARAS EXAGONALES REGULARES 8 unidades

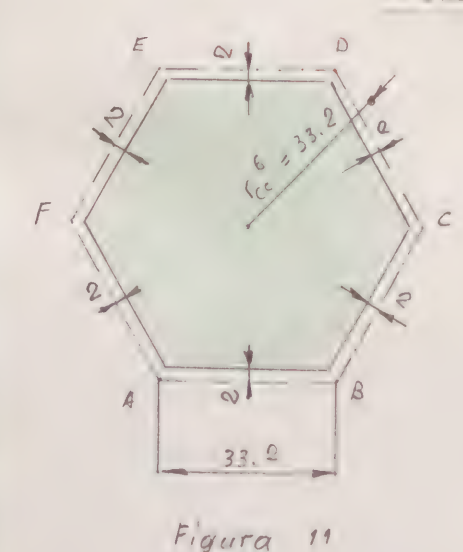


Figura 11

Su forma y dimensiones se deducen de las del exágono ABCDEF de la figura 2, y se detallan en la figura 11

PIEZA Nº 13 8 (u)

Figura 11

Modelo M- 43.5

PIEZA Nº 14 FORRO COLOREADO EN CARAS OCTOGONALES REGULARES

6 unidades

Su forma y dimensiones se deducen de las del octógono ABCDEFGH de la figura 3, y se detallan en la figura 12

FIGURA 12

PIEZA Nº 14

6 (4)

Figura 12

3, 22) Arista lateral "a_e" de las pirámides auxiliares exagonales que fijan la posición de los vértices del exaedro generador con respecto al ARQUIMEDIANO XI.

Se obtiene en función de la arista "a_n" del exaedro generador, de la fórmula (4) deducida en el ESTUDIO PREVIO al ejercicio M. 42.9

$$a_e = \sqrt{\left(r_{cc}^{p} - r_{ci}^{2p}\right)^2 + \left(\frac{a_{x1}}{2}\right)^2} \qquad (4)$$

En esta fórmula general, sustituiremos los valores de sus variables, por los particulares siguientes, correspondientes al exaedro generador:

a) n = Número de caras del exaedro = 6

Mayo 1982

UNE A4 210 x 297

Modelo M- 43.5

b) $a_n = a_6 =$ Arista del exaedro

c) $p =$ Número de lado de los polígonos de las caras del exaedro $= 4$

d) $r_{cc}^{p} = r_{cc}^{4} =$ Radio de la circunferencia circunscrita al cuadrado de una cara del exaedro, de lado "a_6".

e) $r_{ci}^{2p} = r_{ci}^{8} =$ Radio de la circunferencia inscrita al octógono regular de una cara del Arquimediano XI, de arista "a_{XI}".

f) $a_\Delta = a_{XI} =$ Arista del Arquimediano XI.

De estos valores se deducen:

g) $a_\Delta = a_{XI} = \frac{2\sqrt{2} - 1}{7} a_6$ (Ver párrafo 3.21)

h) $r_{cc}^{p} = r_{cc}^{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} a_6$ (Ver (1) G.P. 1.400.-43)

i) $r_{ci}^{2p} = r_{ci}^{8} = \frac{3 + \sqrt{2}}{14} a_6$ (Ver cálculo de "y", párrafo 2.1)

Sustituyendo los valores g), h), i) en (4), tendremos:

$$\boxed{a_\ell} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2} a_6 - \frac{3+\sqrt{2}}{14} a_6\right)^2 + \left(\frac{2\sqrt{2}-1}{7} : 2 \; a_6\right)^2} =$$

$$= \sqrt{\left(\frac{7\sqrt{2}}{14} - \frac{3+\sqrt{2}}{14}\right)^2 + \left(\frac{2\sqrt{2}-1}{14}\right)^2} \; a_6 = \sqrt{\frac{(7\sqrt{2} - 3 - \sqrt{2})^2}{14^2} + \frac{(2\sqrt{2}-1)^2}{14^2}} \; a_6 =$$

$$= \frac{\sqrt{(6\sqrt{2}-3)^2 + (2\sqrt{2}-1)^2}}{14} a_6 = \frac{\sqrt{(72 + 9 - 36\sqrt{2}) + (8 + 1 - 4\sqrt{2})}}{14} a_6 =$$

UNE A4 210 x 297

[illegible] Marzo 15.83

$$= \frac{\sqrt{81 - 36\sqrt{2} + 9 - 4\sqrt{2}}}{14}\, a_6 = \frac{\sqrt{90 - 40\sqrt{2}}}{14}\, a_6 = \boxed{\frac{\sqrt{10 \times (9 - 4\sqrt{2})}}{14}\, a_6}$$

Puede obtenerse "a_l" en función de r_{ec}^6 (dato de este ejercicio) sustituyendo "$a_6 = \frac{2\sqrt{3}}{3} r_{ec}^6$", valor obtenido en el párrafo 3.1 de este ejercicio. Así pues, será:

$$\boxed{a_l} = \frac{\sqrt{10(9-4\sqrt{2})}}{14}\, a_6 = \frac{\sqrt{10(9-4\sqrt{2})}}{14} \times \frac{2\sqrt{3}}{3}\, r_{ec}^6 = \frac{\sqrt{10(9-4\sqrt{2})} \times 2\sqrt{3}}{14 \times 3}\, r_{ec}^6 =$$

$$= \frac{\sqrt{10(9-\sqrt{2}) \times 3}}{21}\, r_{ec}^6 = \frac{\sqrt{30(9-4\sqrt{2})}}{21}\, r_{ec}^6 = \text{(y siendo } 9^2 - (4\sqrt{2})^2 = 7^2\text{, será)}$$

$$= \frac{\sqrt{30} \times \left(\sqrt{\frac{9+7}{2}} - \sqrt{\frac{9-7}{2}}\right)}{21}\, r_{ec}^6 = \frac{\sqrt{30}\,(\sqrt{8} - 1)}{21}\, r_{ec}^6 = \boxed{\frac{\sqrt{30} \times (2\sqrt{2} - 1)}{21}\, r_{ec}^6}$$

Su valor numérico será pues:

$$\boxed{a_l} = \frac{\sqrt{30}\,(2\sqrt{2}-1)}{21} \times r_{ec}^6 \cong 0,47\,68\,90\,84\,8 \times 110 \cong 52,46 \cong \boxed{52.5 \text{ mm}}$$

PIEZA Nº 14 DESARROLLO LATERAL DE LAS PIRÁMIDES AUXILIARES EXAGONALES 8 unidades

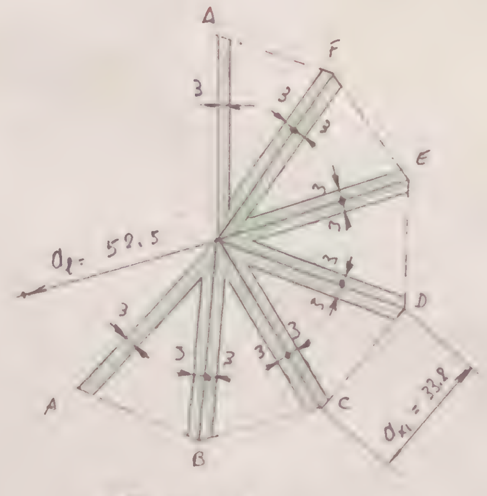


Figura 12

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 12.

$\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = \overline{DE} = \overline{EF} = \overline{FA} = 33.2$ mm

PIEZA Nº 14 8(U)

Figura 12

Modelo M-43.5

PIEZA Nº 15 UNIONES ARISTAS DE LAS PIRÁMIDES EXAGONALES

48 unidades

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 13

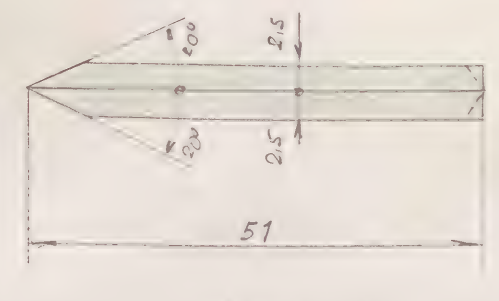
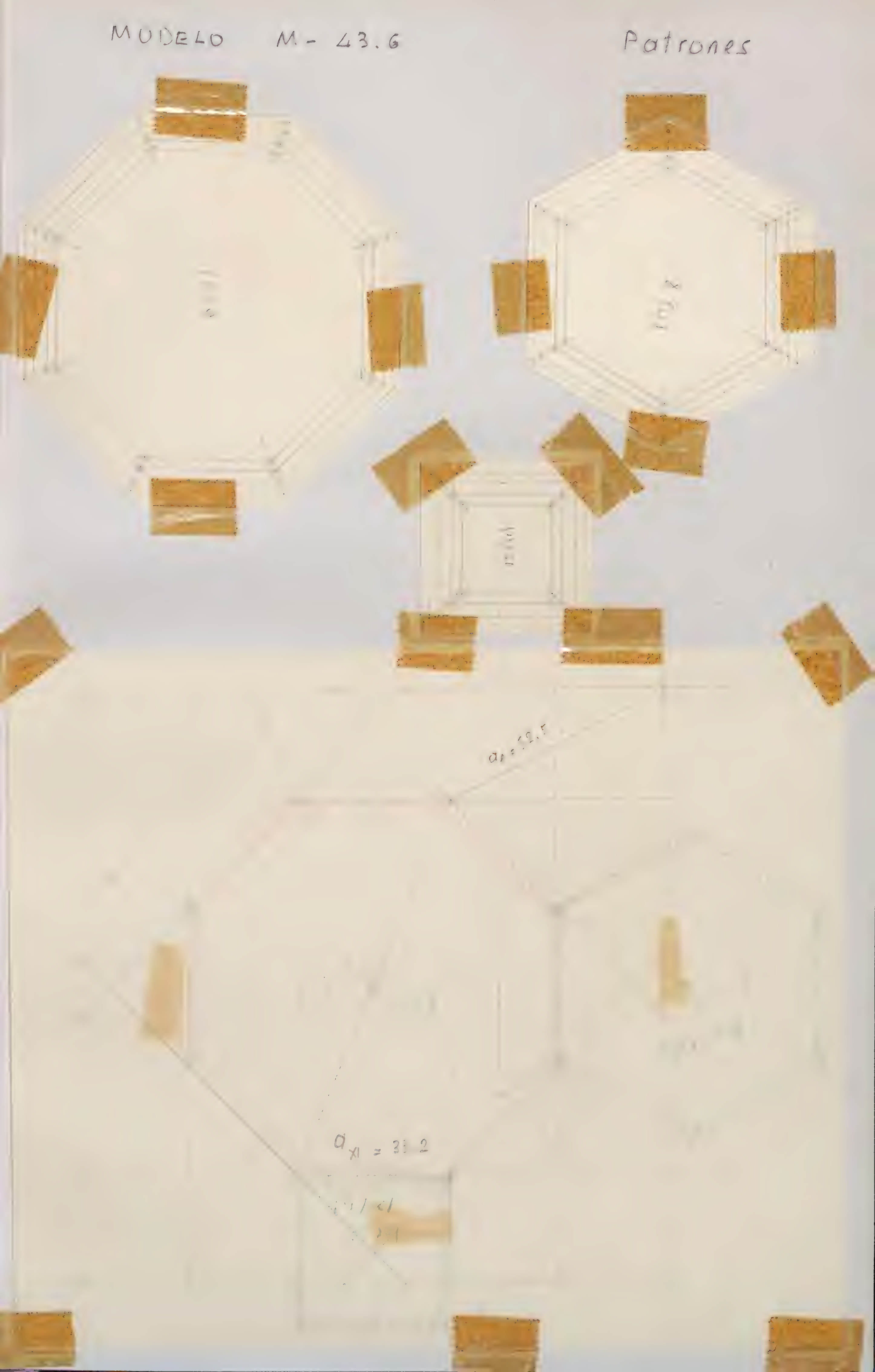


Figura 13

PIEZA Nº 15 48 (u)

Figura 15


MODELO M- 43.6
Patrones
$a_8 = 12,5$
$a_{x1} = 31,2$

MODELO CORPÓREO DEL "ARQUIMEDIANO XI" OBTENIDO POR TRUNCADURA PARALELA DE ARISTAS DE UN OCTAEDRO REGULAR CONVEXO, DE ARISTA "a_8", A LA DISTANCIA "$y = \frac{\sqrt{2}-1}{3} a_8$", SEGUIDA DE UNA TRUNCADURA DE VÉRTICES (O VICEVERSA), A LA DISTANCIA "$x = \frac{\sqrt{2}}{3} a_8$", AL TOMAR SOBRE CADA arista, y desde su VÉRTICE, LAS DISTANCIAS "y" Y "x" RESPECTIVAMENTE.- EL ARQUIMEDIANO OBTENIDO, SE CONSTRUIRÁ CON LAS CARAS MACIZAS, Y EL OCTAEDRO REGULAR GENERADOR, CON LAS CARAS VACIADAS.

Radio de la esfera circunscrita al octaedro regular:

$$r_{ec}^{8} = 110 \text{ mm}$$

	Ejercicios de construcción de poliedros MODELOS CORPÓREOS	Modelo M-43.6

ENUNCIADO: Construir el modelo corpóreo del "ARQUIMEDIANO XI", obtenido por truncadura paralela de aristas de un octaedro regular convexo, de arista "a_8" a la distancia "$y = \frac{\sqrt{2}-1}{3} a_8$", seguida de una truncadura de vértices (o viceversa), a la distancia "$x = \frac{\sqrt{2}}{3} a_8$", al tomar sobre cada arista, y desde su vértice, las distancias "y" y "x" respectivamente. El Arquimediano obtenido, se construirá con las caras macizas, y el octaedro regular generador, con las caras vaciadas.

DATO ÚNICO DE ESTE EJERCICIO: r_{ec}^{8} = Radio de la esfera circunscrita al octaedro generador:

$$r_{ec}^{8} = 110 \text{ mm}$$

1) GENERALIDADES

En el ESTUDIO PREVIO al modelo 42.9, desarrollamos y y aplicamos una variante al proceso geométrico denominado "TRUNCADURA PARALELA DE ARISTAS", seguida de una "TRUNCADURA DE VÉRTICES" (o viceversa) de un poliedro regular convexo, diferente al estudiado en el ejercicio M-35.10

Esta nueva aplicación de dicho proceso, da lugar tam-

UNE A4 210 x 297

bién a la formación de un poliedro núcleo convexo, cuyas características geométricas detallamos en el párrafo 4 del ejercicio previo al modelo M-42.9. En el caso especial descrito en este enunciado, dicho poliedro núcleo es un ARQUIMEDIANO.

Las características geométricas de este Arquimediano, serán pues las siguientes:

a) Los planos secantes "π_1" de la truncadura paralela de aristas, y los "π_2" de la de vértices, dan lugar a la formación de ocho exágonos regulares de lado "$l_6 = a_\Delta$" situados en las caras del octaedro generador.

b) Igualmente dichos planos "π_1" y "π_2", formarán con sus mutuas intersecciones, seis octógonos regulares de lado "$l_8 = a_\Delta$", asociados a cada vértice.

c) Los planos secantes "π_1" producen a su vez doce cuadrados paralelos a cada arista del P_8, situados en "π_1", y de lado "$l_4 = a_\Delta$".

Por consiguiente, el poliedro núcleo estará limitado por OCHO CARAS EXAGONALES REGULARES, SEIS CARAS OCTOGONALES REGULARES y DOCE CARAS CUADRADAS, todas de igual lado.

Estas son las características geométricas del ARQUIMEDIANO XI, estudiado y representado en el ejercicio G.E. nº... - Lámina 43, que detallamos a continuación.

UNE A4 210 x 297

Cabrera Mayo 1982

ARQUIMEDIANO XI

1) Número de caras cuadradas $C_4 = 12$

2) Número de caras exagonales $C_6 = 8$

3) Número de caras octogonales $C_8 = 6$

4) Número de vértices $= \frac{12 \times 4 + 8 \times 6 + 6 \times 8}{3}$ $V = 48$

5) Número de aristas $= \frac{12 \times 4 + 8 \times 6 + 6 \times 8}{2}$ $A = 72$

6) Número de caras en cada vértice $= 1\,C_4 + 1\,C_6 + 1\,C_8$

---

2) POSICIÓN DE LOS PLANOS SECANTES "π_1" Y "π_2"

La posición de los planos secantes "π_1" con los que se obtiene la "Truncadura paralela de aristas" y la de los "π_2" para la "Truncadura de vértices" con respecto al poliedro generador, se obtiene mediante las distancias "y" y "x" respectivamente, tomadas sobre las aristas y a partir de sus vértices. Para su determinación se han obtenido en el EJERCICIO PREVIO al modelo M-42,9, fórmulas generales que aplicaremos a este ejercicio.

2.1) Cálculo de la distancia "y" que fija la posición del plano "π_1" en la truncadura paralela de aristas

Se obtiene, en función de la arista "a_8" del octaedro generador, de la fórmula general (2) del modelo M-42,9

$$y = \frac{r_{ci}^{p} - r_{ci}^{2p}}{\operatorname{sen} \beta} \qquad (2)$$

En esta fórmula sustituiremos los valores generales de sus variables por los particulares siguientes, correspondientes al octaedro generador:

a) n = Número de caras del octaedro = 8

b) p : Número de lados del polígono de una cara del octaedro = 3

c) $r_{ci}^{p} = r_{ci}^{3}$ = Radio de la circunferencia inscrita al triángulo equilátero de una cara del octaedro, de lado "$l_3 = a_8$"

d) $r_{ci}^{2p} = r_{ci}^{6}$ = Radio de la circunferencia inscrita al exágono regular de una cara del Arquimediano X1, de arista "a_{X1}"

e) β = Angulo interior del triángulo de una cara del octaedro $= \dfrac{180^\circ\,(3-2)}{3} = 60^\circ$

De estos valores, se deduce:

f) $\boxed{\operatorname{sen} \beta} = \operatorname{sen} 60^\circ = \boxed{\dfrac{\sqrt{3}}{2}}$ (Ver G.P. 1006)

g) $\boxed{r_{ci}^{p}} = \boxed{r_{ci}^{3} = \dfrac{\sqrt{3}}{6} a_8}$ (Ver (3) G.P. 1400-42)

h) $r_{ci}^{2p} = \boxed{r_{ci}^{6}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} a_{X1} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \times \dfrac{2-\sqrt{2}}{3} a_8 = \boxed{\dfrac{2\sqrt{3}-\sqrt{6}}{6} a_8}$

(Ver (2) G.P. 1.400-43

UNE A4 210 x 297

Modelo M - 43.6

(El valor de "$a_{x1} = \frac{2-\sqrt{2}}{3} a_8$" se deduce posteriormente en el párrafo 3.21)

Sustituyendo los valores f), g) y h) en (2), tendremos:

$$y = \frac{\frac{\sqrt{3}}{6} a_8 - \frac{2\sqrt{3} - \sqrt{6}}{6} a_8}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\frac{\sqrt{3} - 2\sqrt{3} + \sqrt{6}}{6}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} a_8 = \frac{\frac{\sqrt{6} - \sqrt{3}}{6}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} a_8 =$$

$$= \frac{\sqrt{6} - \sqrt{3}}{6} : \frac{\sqrt{3}}{2} a_8 = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{3}}{3\sqrt{3}} a_8 = \frac{\sqrt{18} - 3}{9} a_8 = \frac{3\sqrt{2} - 3}{9} a_8 = \boxed{\frac{\sqrt{2} - 1}{3} a_8}$$

De donde se obtiene finalmente:

$$\boxed{y = \frac{\sqrt{2} - 1}{3} a_8}$$

Este valor de "y" justifica el expresado en el enunciado.

2.2 Cálculo de la distancia "x" que fija la posición del plano "π_2" en la "Truncadura de vértices

Se obtiene, en función de la arista "a_8" del poliedro generador, de la fórmula general (3) deducida en el Ejercicio previo al modelo M - 42.9

$$\boxed{x = \frac{r_{cc}^{p} - r_{ci}^{2p}}{\cos \frac{\beta}{2}}} \qquad (3)$$

En esta fórmula sustituiremos los valores generales de sus variables, por los particulares siguientes, correspondientes al octaedro regular generador. /

Alvarez Mayo 1982

a) n = Número de caras del octaedro = 8

b) $a_n = a_8$ = Arista del octaedro.

c) p = Número de lados de los polígonos de las caras del octaedro generador = 3

d) $r_{cc}^{p} = r_{cc}^{3}$ = Radio de la circunferencia circunscrita al triángulo equilátero de una cara del octaedro, de lado "a_8".

e) $r_{ci}^{2p} = r_{ci}^{6}$ = Radio de la circunferencia inscrita al exágono regular de una cara del Arquimediano XI, de arista "a_{XI}"

f) β = Angulo interior del triángulo equilátero de una cara del octaedro = $\frac{180^\circ \times (3-2)}{3} = 60^\circ$

De estos valores, se deduce:

g) $\boxed{\cos\frac{\beta}{2}} = \cos\frac{60^\circ}{2} = \cos 30^\circ = \boxed{\frac{\sqrt{3}}{2}}$ (Ver G.P. 1006)

h) $r_{cc}^{p} = \boxed{r_{cc}^{3}} = \boxed{\frac{\sqrt{3}}{3}\, a_8}$ (Ver (2) G.P. 1400.42)

i) $r_{ci}^{2p} = \boxed{r_{ci}^{6}} = \frac{\sqrt{3}}{2}\, a_{XI} = \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{2-\sqrt{2}}{3}\, a_8 = \boxed{\frac{2\sqrt{3}-\sqrt{6}}{6}\, a_8}$

(El valor "$a_{XI} = \frac{2-\sqrt{2}}{3}\, a_8$" se deduce posteriormente en el párrafo 3.21) Ver también (G.P. (2) 1400-43)

Sustituyendo los valores g), h), i) en (3), tendremos a continuación:

$$x = \frac{\frac{\sqrt{3}}{3}a_8 - \frac{2\sqrt{3}-\sqrt{6}}{6}a_8}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{2\sqrt{3}-\sqrt{6}}{6}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} a_8 = \frac{\frac{2\sqrt{3}-2\sqrt{3}+\sqrt{6}}{6}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} a_8 =$$

$$= \frac{\sqrt{6}}{6} : \frac{\sqrt{3}}{2} a_8 = \frac{2\sqrt{6}}{6\sqrt{3}} a_8 = \frac{\sqrt{18}}{9} a_8 = \frac{3\sqrt{2}}{9} a_8 = \boxed{\frac{\sqrt{2}}{3} a_8}$$

de donde se obtiene finalmente:

$$\boxed{x = \frac{\sqrt{2}}{3} a_8}$$

Este valor de "x" justifica el expresado en el enunciado.

3) CONSTRUCCIÓN DE ESTE MODELO

Para la construcción de este modelo, son necesarias las siguientes piezas:

3.1) OCTAEDRO REGULAR GENERADOR, DE CARAS VACIADAS

El valor de "a_8" se obtiene de la fórmula "$r_{ec}^8 = \frac{\sqrt{2}}{2} a_8$", deducida en el ejercicio G. E. nº... Lámina 3. Despejando en ella "a_8", será:

$$\boxed{a_8} = r_{ec}^8 : \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{2}{\sqrt{2}} r_{ec}^8 = \frac{2\sqrt{2}}{2} r_{ec}^8 = \boxed{\sqrt{2}\ r_{ec}^8}$$

PIEZA Nº 1 CARAS SUPERFICIALES TRIANGULARES REGULARES — 8 unidades

Su forma y dimensiones son iguales a las de la figura nº 1 del ejercicio M- 3.102

PIEZA Nº 2 UNIONES ARISTAS 12 unidades

Su forma y dimensiones son iguales a las de la figura 2 del ejercicio M - 3.102

3.2) ARQUIMEDIANO XI (NÚCLEO DEL OCTAEDRO GENERADOR), DE CARAS MACIZAS, INCLUIDO LAS PIRÁMIDES AUXILIARES DE FIJACIÓN DE LOS VÉRTICES DEL OCTAEDRO GENERADOR, A LAS CARAS OCTOGANALES DEL ARQUIMEDIANO XI.

3.21) cálculo de la longitud "a_{XI}" de la arista del ARQUIMEDIANO XI, engendrado por el octaedro generador.

Se obtiene, en función de la arista "a_8" del octaedro generador, de la fórmula (1) deducida en el ESTUDIO PREVIO al modelo M - 42.9

$$a_{XI} = \frac{\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} \ \operatorname{sen} \varphi}{\operatorname{sen} \varphi \ \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{4} + 1} \, a_n \qquad (1)$$

En esta fórmula, sustituiremos los valores generales de sus variables por los particulares siguientes, correspondientes al octaedro regular convexo generador:

a) n = Número de caras del octaedro = 8

Modelo M-43.6

b) $a_n = a_8$ = Arista del octaedro

c) α = Angulo central del triángulo equilátero de una cara del octaedro $= \dfrac{360^\circ}{3} = 120^\circ$

d) φ = Semiángulo del diedro formado por dos caras consecutivas del octaedro.

De estos valores se deduce:

e) $\boxed{\operatorname{sen} \varphi = \dfrac{\sqrt{6}}{3}}$ (Ver ejercicio G.P nº... Lámina 3)

f) $\boxed{\operatorname{ctg} \dfrac{\alpha}{2}} = \operatorname{ctg} \dfrac{120^\circ}{2} = \operatorname{ctg} 60^\circ = 1 : \operatorname{tg} 60^\circ = 1 : \sqrt{3} = \boxed{\dfrac{\sqrt{3}}{3}}$ (G.P. 1006)

g) $\boxed{\operatorname{ctg} \dfrac{\alpha}{4}} = \operatorname{ctg} \dfrac{120^\circ}{4} = \operatorname{ctg} 30^\circ = 1 : \operatorname{tg} 30^\circ = 1 : \dfrac{\sqrt{3}}{3} = \boxed{\sqrt{3}}$ (G.P. 1006)

Sustituyendo los valores e), f) y g) en (1), tendremos:

$$\boxed{a_{x1}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{3} \times \frac{\sqrt{6}}{3}}{\frac{\sqrt{6}}{3} \times \sqrt{3} + 1} a_8 = \frac{\frac{\sqrt{18}}{9}}{\frac{\sqrt{18}}{3} + 1} a_8 = \frac{\frac{3\sqrt{2}}{9}}{\frac{3\sqrt{2}}{3} + 1} a_8 = \frac{\frac{\sqrt{2}}{3}}{\sqrt{2} + 1} a_8 =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{3(\sqrt{2}+1)} a_8 = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)}{3 \times (2-1)} a_8 = \boxed{\frac{2 - \sqrt{2}}{3} a_8}$$

Puede obtenerse "a_{x1}" en función de "r_{ec}^8" (dato de este modelo, sustituyendo el valor de "$a_8 = \sqrt{2}\, r_o^8$" obtenido en el párrafo 3.1 de este ejercicio.

Así pues, tendremos:

UNE A4 210 x 297

Álvarez Mayo 1983

$$\boxed{a_{x1}} = \frac{2-\sqrt{2}}{3}\, a_8 = \frac{2-\sqrt{2}}{3} \times \sqrt{2}\; r_{pc}^{8} = \boxed{\frac{2\sqrt{2}-2}{3}\, r_{pc}^{8}}$$

El valor numérico de "a_{x1}", será pues:

$$\boxed{a_{x1}} = \frac{2\sqrt{2}-2}{3}\, r_{pc}^{8} \cong 0.27\,61\,42\,37\,5\ldots \times 110 \cong 30.37 \cong \boxed{30.4 \text{ mm}}$$

PIEZA Nº 3 CARAS SUPERFICIALES CUADRADAS

12 unidades

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 1

D C

A B

30.4

Figura 1

PIEZA Nº 3 12 (u)

Figura 1

PIEZA Nº 4 CARAS SUPERFICIALES EXAGONALES REGULARES

8 unidades

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 2

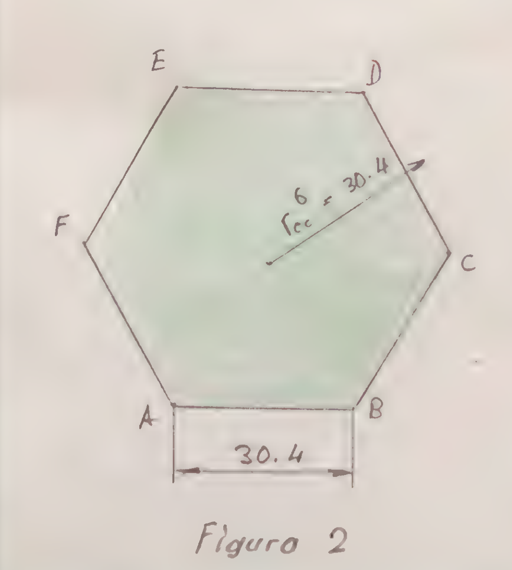


Figura 2

PIEZA Nº 4

8 (u)

Figura 2

Modelo M- 43.6

PIEZA Nº 5 CARAS SUPERFICIALES OCTOGONALES REGULARES

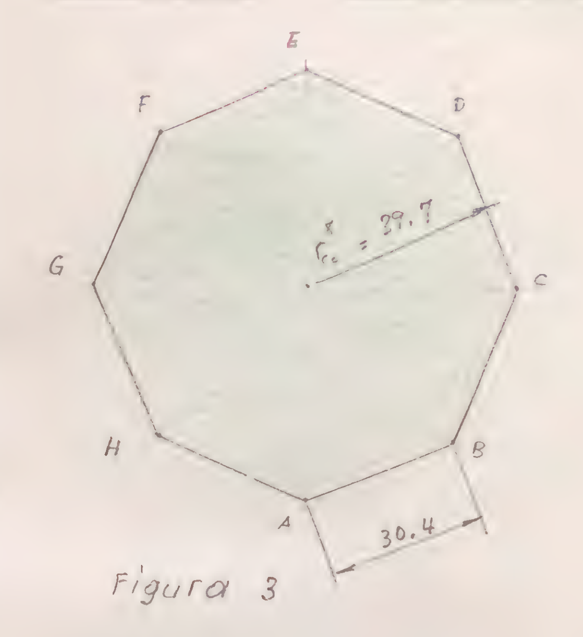


Figura 3

6 unidades

$r_{cc}^{8} = 1,3065 \times 30,38 = 39.7$ mm

La forma y dimensiones se detallan en la figura 3

PIEZA Nº 5 6 (u)

Figura 3

PIEZA Nº 6 REFUERZO NORMAL EN CARAS CUADRADAS

12 unidades

Figura 4

La forma y dimensiones se deducen de las del cuadrado ABCD de la fig. 1 y se detallan en la fig. 4

PIEZA Nº 6 12 (u)

Figura 4

PIEZA Nº 7 REFUERZO NORMAL EN CARAS EXAGONALES REGULARES

8 unidades.

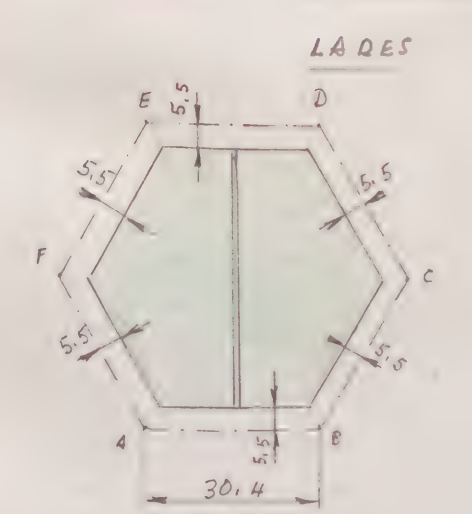


Figura 5

La forma y dimensiones, se deducen de las del exágono ABCDEF de la figura 2, y se detallan en la figura 5

PIEZA Nº 7 8 (u)

Figura 5

UNE A4 210 x 297

Alvarez Mayo 1982

Modelo M- 43.6

PIEZA Nº 8 REFUERZO NORMAL EN CARAS OCTAGONALES REGULARES.

6 unidades

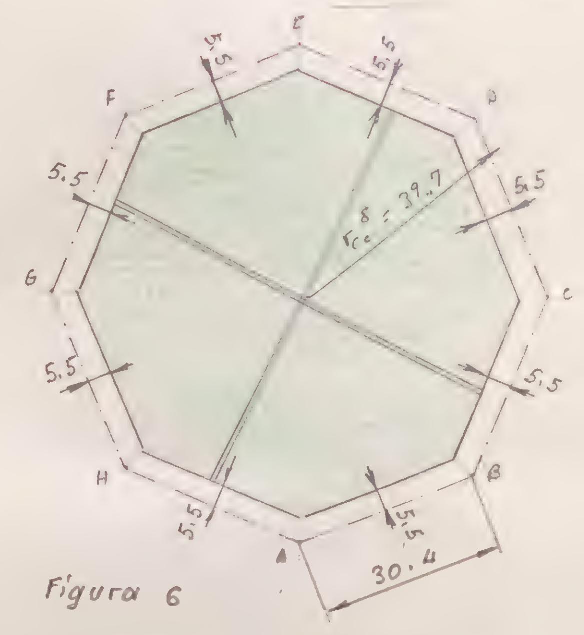


Figura 6

Su forma y dimensiones se deducen de las del octógono ABCDEFGH de la figura 3. y se detallan en la figura 6

PIEZA Nº 6 6 (u)

Figura 6

PIEZA Nº 9 REFUERZO TRANSVERSAL EN CARAS EXAGONALES REGULARES

16 unidades

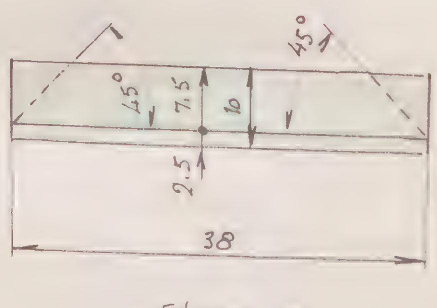


Figura 7

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 7; su colocación en la figura 5

PIEZA Nº 9 16 (u)

Figura 7

PIEZA Nº 10 REFUERZO TRANSVERSAL EN CARAS OCTAGONALES REGULARES

24 unidades

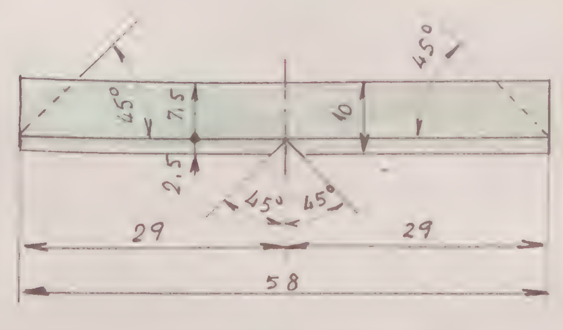


Figura 8 .

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 8; su colación, en la figura 5

PIEZA Nº 10 24 (u)

Figura 8

UNE A4 210 x 297

[signature] Mayo 1982

PIEZA Nº 11 UNIONES ARISTAS 72 unidades

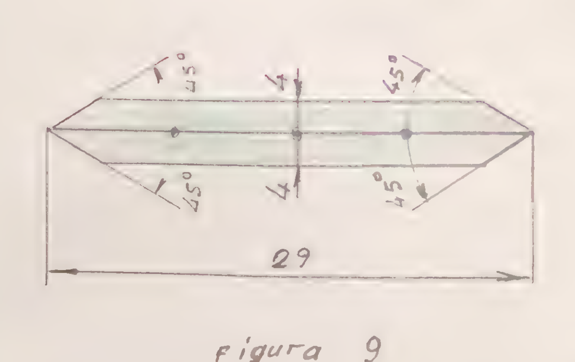


Figura 9

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 9

PIEZA Nº 11 72 (u)

Figura 9

PIEZA Nº 12 FORRO COLOREADO EN CARAS CUADRADAS 12 unidades

Figura 10

Su forma y dimensiones se deducen de las del cuadrado ABCD de la figura 1, y se detallan en la figura 10

PIEZA Nº 12 12 (u)

Figura 10

PIEZA Nº 13 FORRO COLOREADO EN CARAS EXAGONALES REGULARES 8 unidades

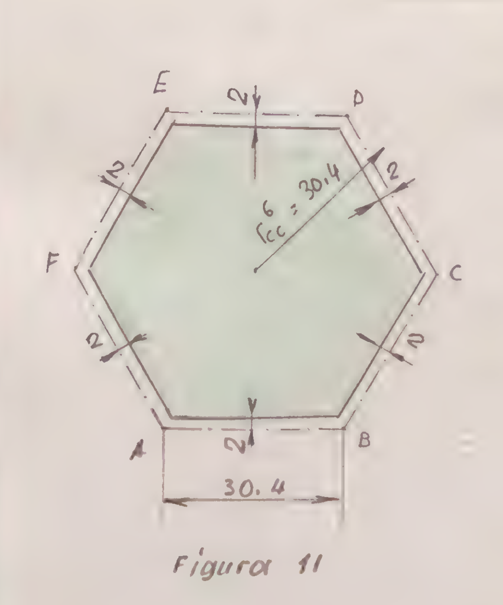


Figura 11

Su forma y dimensiones se deducen de las del exágono ABCDEF de la figura 2, y se detallan en la figura 11

PIEZA Nº 13 8 (u)

Figura 11

Modelo M - 43.6

PIEZA Nº 14 FORRO COLOREADO EN CARAS OCTOGONALES REGULARES.

6 unidades

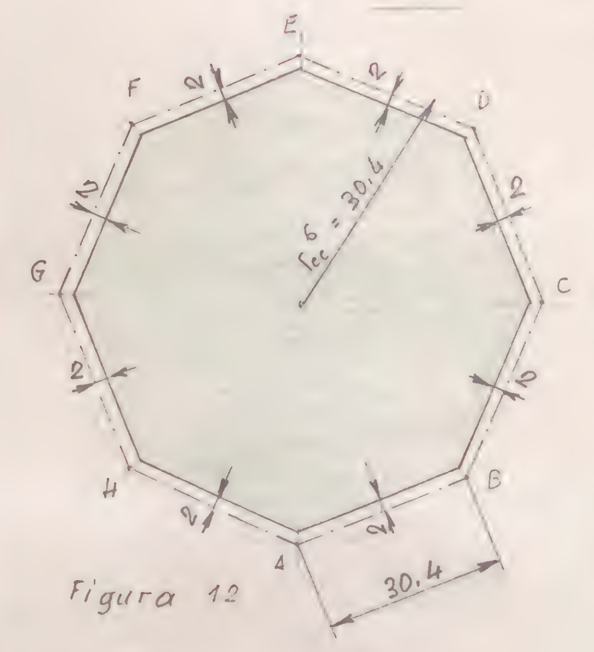


Figura 12

La forma y dimensiones se deducen de las del octógono ABCDEFGH de la figura 3, y se detallan en la figura 12

PIEZA Nº 14 6 (u)

Figura nº 12

3.22) Cálculo de la arista lateral "a_e" de las pirámides auxiliares octogonales que fijan la posición de los vértices del octaedro generador con respecto al ARQUIMEDIANO XI.

Se obtiene, en función de la arista "a_8" del octaedro generador, de la fórmula (4) deducida en el Ejercicio previo al modelo M - 42.9.

$$a_e = \sqrt{\left(r_{cc}^{p} - r_{ci}^{2p}\right)^2 + \left(\frac{a_{XI}}{2}\right)^2} \qquad (4)$$

En esta fórmula general, sustituimos los valores de sus variables por los particulares siguientes, correspondientes al octaedro generador:

a) n = Número de caras del octaedro = 8

Mayo 1982

b) $a_n = a_8$ = Arista del octaedro.

c) p = Número de lados de los polígonos de las caras del exaedro = 3

d) $r_{cc}^{p} = r_{cc}^{3}$ = Radio de la circunferencia circunscrita al triángulo equilátero de una cara del octaedro, de lado "a_8"

e) $r_{ci}^{2p} = r_{ci}^{6}$ = Radio de la circunferencia inscrita al exágono regular de una cara del Arquimediano XI, de arista "a_{XI}".

f) $a_A = a_{XI}$ = Arista del Arquimediano XI.

De estos valores se deduce:

g) $a_A = \boxed{a_{XI}} = \boxed{\frac{2-\sqrt{2}}{3}\,a_8}$ (Ver párrafo 3.21)

h) $r_{cc}^{p} = r_{cc}^{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}\,a_8$ (Ver (2) G.P. 1400.42)

i) $r_{ci}^{2p} = \boxed{r_{ci}^{6} = \frac{2\sqrt{3}-\sqrt{6}}{6}\,a_8}$ (Ver (2) 1400.43)

Sustituyendo los valores g), h) i) en (4), tendremos:

$$\boxed{a_\ell} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\,a_8 - \frac{2\sqrt{3}-\sqrt{6}}{6}\,a_8\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\times\frac{2-\sqrt{2}}{3}\,a_8\right)^2} =$$

$$= \sqrt{\left(\frac{2\sqrt{3}-2\sqrt{3}+\sqrt{6}}{6}\right)^2 + \left(\frac{2-\sqrt{2}}{6}\right)^2}\,a_8 = \sqrt{\frac{(\sqrt{6})^2}{6^2} + \frac{(2-\sqrt{2})^2}{6^2}}\,a_8 =$$

$$= \frac{\sqrt{6+(2-\sqrt{2})^2}}{6}\,a_8 = \frac{\sqrt{6+4+2-4\sqrt{2}}}{6}\,a_8 = \frac{\sqrt{12-4\sqrt{2}}}{6}\,a_8 = \boxed{\frac{\sqrt{3-\sqrt{2}}}{3}\,a_8}$$

UNE A4 210 x 297

[signature] Mayo 1982

De donde se obtiene finalmente:

$$a_\ell = \frac{\sqrt{3-\sqrt{2}}}{3}\, a_8$$

Puede obtenerse "a_ℓ" en función de "r_{ec}^8" (dato de este ejercicio) sustituyendo "$a_8 = \sqrt{2}\; r_{ec}^8$", valor obtenido en el párrafo 3.1 de este ejercicio. Así pues, será:

$$a_\ell = \frac{\sqrt{3-\sqrt{2}}}{3}\, a_8 = \frac{\sqrt{3-\sqrt{2}}}{3} \times \sqrt{2}\; r_{ec}^8 = \frac{\sqrt{(3-\sqrt{2})\times 2}}{3}\, r_{ec}^8 = \frac{\sqrt{6-2\sqrt{2}}}{3}\, r_{ec}^8$$

Su valor numérico, será pues:

$$a_\ell = \frac{\sqrt{6-2\sqrt{2}}}{3} \times r_{ec}^8 \cong 0{,}59\,36\,30\,34\,5\ldots \times 110 \cong 65{,}30 \text{ mm}$$

PIEZA Nº 14 DESARROLLO LATERAL DE LAS PIRÁMIDES AUXILIARES OCTOGONALES 6 unidades

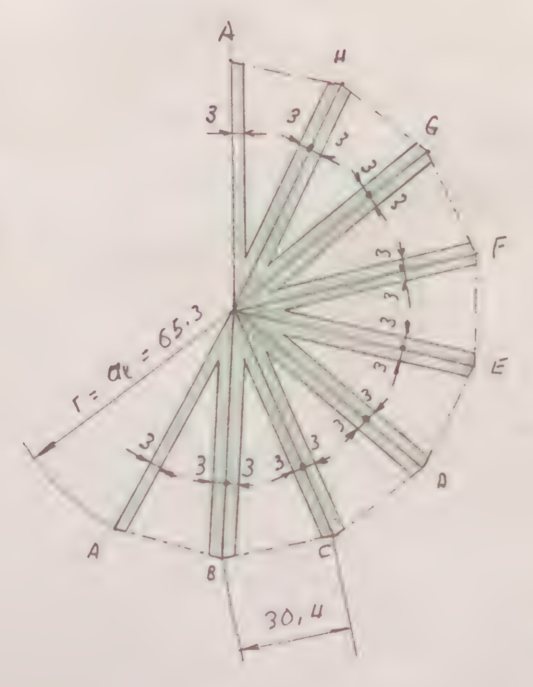


Figura 12

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 12.

$\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = \overline{DE} = \overline{EF} = \overline{FG} = \overline{GH} = \overline{HA} = 30{,}4$ mm

PIEZA Nº 14

6 (4)

Figura 12

UNE A4 210 x 297

Modelo M- 43.6

PIEZA Nº 15 UNIONES ARISTAS DE LAS PIRÁMIDES OCTOGONALES

48 unidades

La forma y dimensiones se detallan en la figura 13

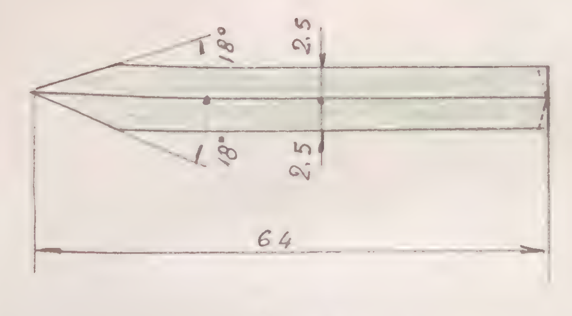


Figura 13

PIEZA Nº 15 48 (u)

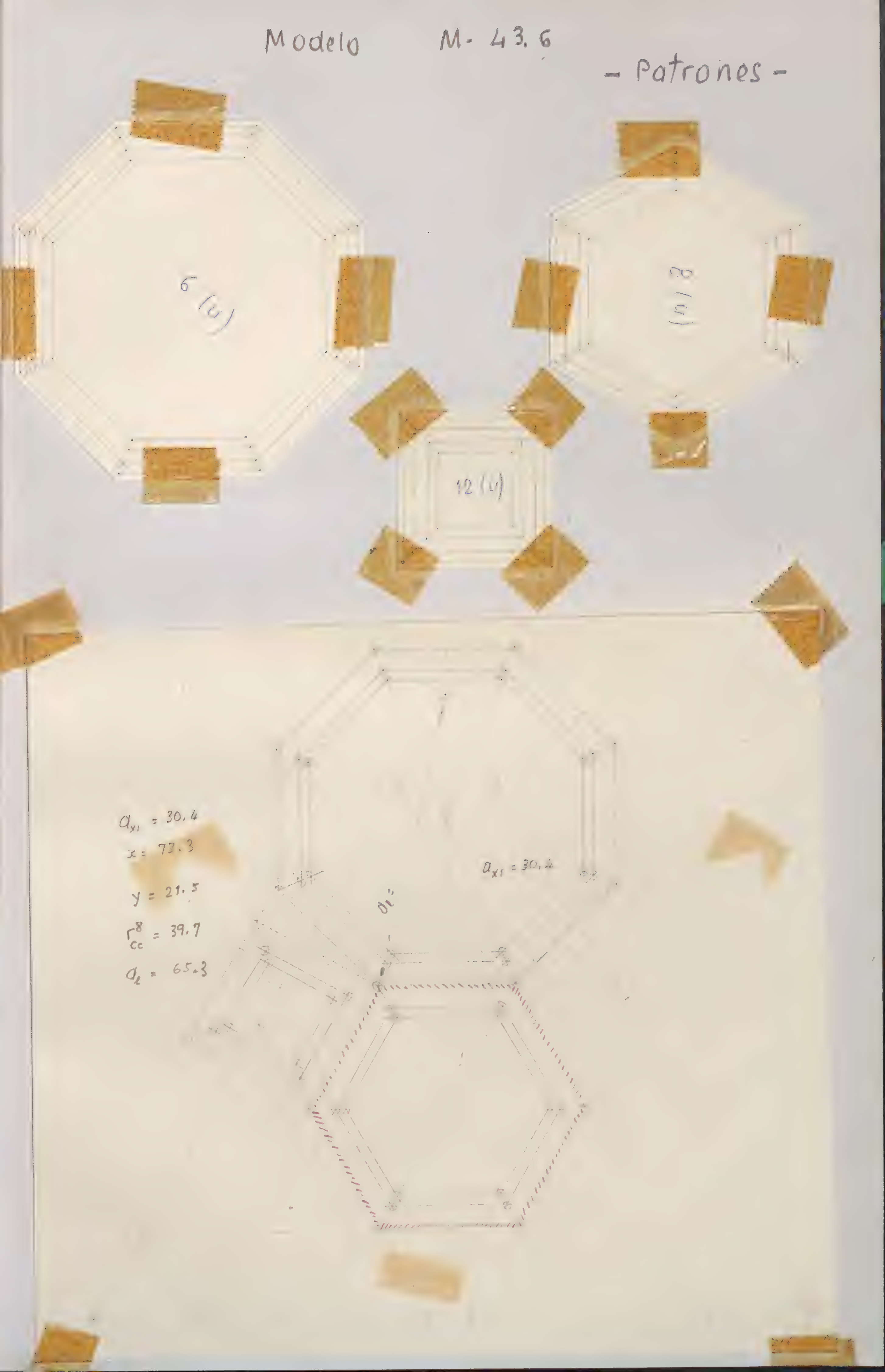
Figura 13

UNE A4:210 x 297

Talavera Mayo 1982

Modelo M- 43.6

- Patrones -



MODELO CORPÓREO DEL POLIEDRO CONVEXO DE CARAS MACIZAS "ARQUIMEDIANO XII", FORMADO POR TREINTA CARAS CUADRADAS (C_4); VEINTE CARAS EXAGONALES (C_6) Y DOCE CARAS DECAGONALES REGULARES (C_{10}), CONCURRIENDO EN CADA VÉRTICE $1\ C_4 + 1\ C_6 + 1\ C_{10}$.

Radio de la esfera circunscrita:

$$r_{ec}^{XII} = 110 \text{ mm.}$$

<u>ENUNCIADO:</u> Construir el modelo corpóreo del poliedro convexo de caras macizas "ARQUIMEDIANO XII", formado por treinta caras cuadradas (C_4); veinte caras exagonales (C_6) y doce caras decagonales regulares (C_{10}), concurriendo en cada vértice $1\,C_4 + 1\,C_6 + 1\,C_{10}$.

Este poliedro ha sido estudiado analíticamente en el ejercicio G.E. nº.... Lámina 44, y representado en sus vistas principal, superior y lateral izquierda, a escala 1:1, siendo $r_{ec}^{XII} = 55$ mm.

<u>DATO ÚNICO DE ESTE EJERCICIO:</u> Radio de la esfera circunscrita:

$$r_{e_c}^{XII} = 110 \text{ mm}$$

Las características de este Arquimediano son:

1) Número de caras cuadradas: $C_4 = 30$
2) Número de caras exagonales regulares: $C_6 = 20$
3) Número de caras decagonales regulares: $C_{10} = 12$
4) Número de vértices $= \dfrac{30 \times 4 + 20 \times 6 + 12 \times 10}{3} = V = 120$
5) Número de aristas $= \dfrac{30 \times 4 + 20 \times 6 + 12 \times 10}{2} = A = 180$
6) Número de caras en cada vértice $1\,C_4 + 1\,C_6 + 1\,C_{10}$

UNE A4 210 x 297

Modelo M- 44.1

Para obtener el despiezo de este poliedro, calculemos previamente la longitud "a_{XII}" de la arista del mismo, en función del radio "r_{ec}^{XII}" de su esfera circunscrita.

Su valor se deduce de la fórmula "$r_{ec}^{XII} = \frac{\sqrt{31 + 12\sqrt{5}}}{2} a_{XII}$" obtenida en el mencionado ejercicio G.E. nº... Lámina 44.

Despejando en ella a_{XII}, tendremos:

$$\boxed{a_{XII}} = r_{ec}^{XII} : \frac{\sqrt{31 + 12\sqrt{5}}}{2} = \frac{2}{\sqrt{31 + 12\sqrt{5}}} \times r_{ec}^{XII} = 2 \times \frac{1}{\sqrt{31 + 12\sqrt{5}}} r_{ec}^{XII} =$$

$$= 2 \times \sqrt{\frac{1}{31 + 12\sqrt{5}}} r_{ec}^{XII} = 2 \times \sqrt{\frac{31 - 12\sqrt{5}}{(31)^2 - (12\sqrt{5})^2}} r_{ec}^{XII} = 2\sqrt{\frac{31 - 12\sqrt{5}}{961 - 720}} r_{ec}^{XII} =$$

$$= \boxed{2\sqrt{\frac{31 - 12\sqrt{5}}{241}} r_{ec}^{XII}}$$

Su valor numérico será pues:

$$\boxed{a_{XII}} = 2\sqrt{\frac{31 - 12\sqrt{5}}{241}} \times 110 = 0,26\,29\,92\,17\,5\ldots \times 110 = \boxed{28,9 \text{ mm}}$$

Esta sola magnitud nos permite la construcción del poliedro estudiado, para lo cual son necesarias las siguientes piezas:

PIEZA Nº 1 CARAS SUPERFICIALES CUADRADAS

30 unidades

Su forma y dimensiones se detallan en la figura nº 1.

UNE A4 210 x 297

Cdlwarez Julio 1982

D C

A B

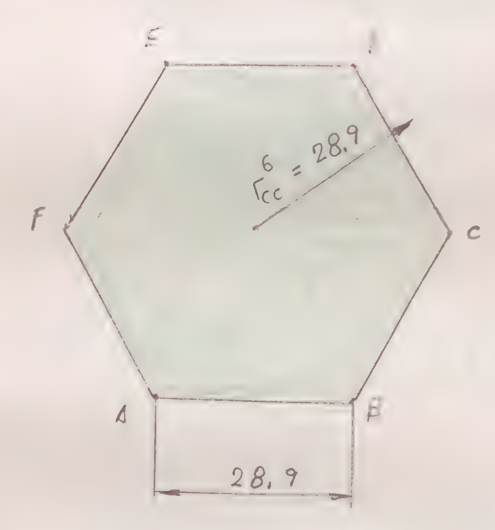
28,9

Figura 1

PIEZA Nº 1 30 (u)

Figura 1

PIEZA Nº 2 CARAS SUPERFICIALES EXAGONALES REGULARES. 20 unidades



Su forma y dimensiones se detallan en la figura 2

PIEZA Nº 2 20 (u)

Figura 2

Figura 2

PIEZA Nº 3 CARAS SUPERFICIALES DECAGONALES REGULARES 12 unidades

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 3 (hoja 4)

UNE A4 210 x 297

Alvarez Julio 1982

Modelo M-44.1

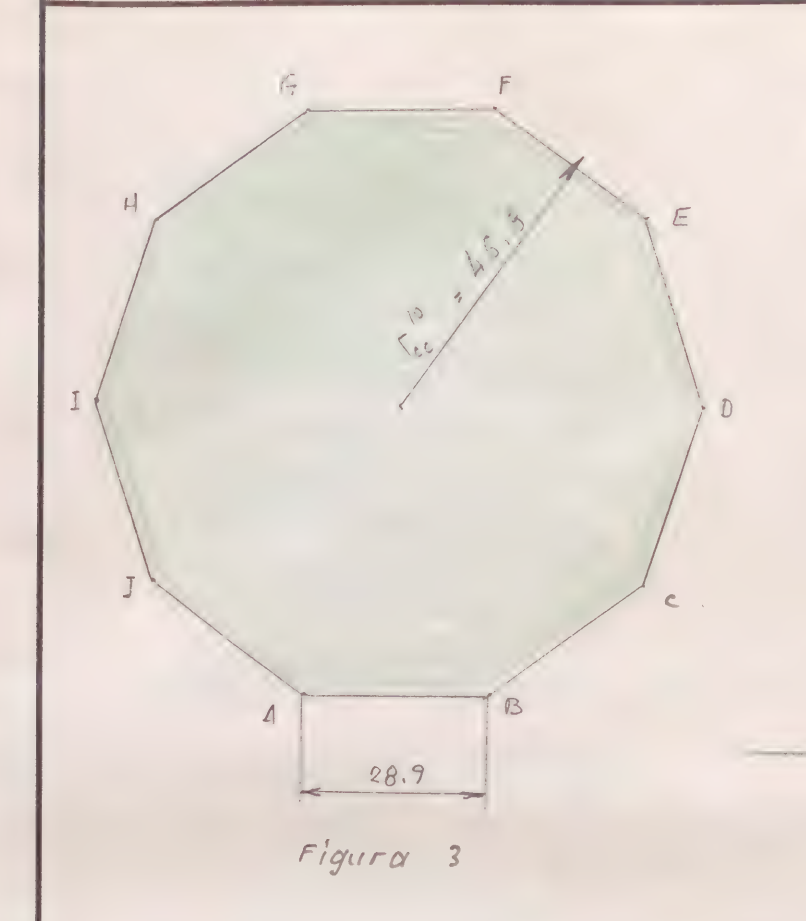


Figura 3

$$r_{ec}^{10} = \frac{\sqrt{5}+1}{2} \times 28.9 = 1.618 \times 28.9 =$$
$$= 46.8 \text{ mm}$$

PIEZA Nº 3

12 (u)

Figura 3

PIEZA Nº 4 REFUERZO NORMAL EN CARAS CUADRADAS.

30 unidades

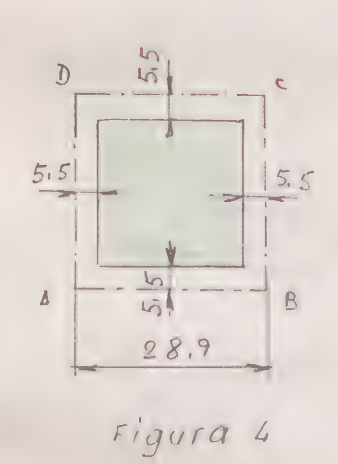


Figura 4

Su forma y dimensiones se deducen de las del cuadrado ABCD de la figura 1, y se detallan en la figura 4

PIEZA Nº 4 30 (u)

Figura 4

PIEZA Nº 5 REFUERZO NORMAL EN CARAS EXAGONALES REGULARES 20 unidades

Su forma y dimensiones se deducen de las del exágono regular ABCDEF de la figura 2, y se detallan en la figura 5.

UNE A4 210 x 297

Tavares Julio 1982

Modelo M-44.1

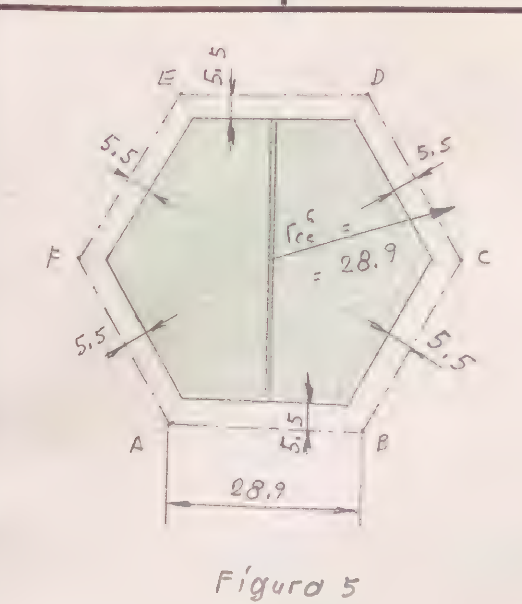


Figura 5

PIEZA Nº 5

20 (u)

Figura 5

PIEZA Nº 6 REFUERZO NORMAL EN CARAS DECAGONALES REGULARES 12 unidades

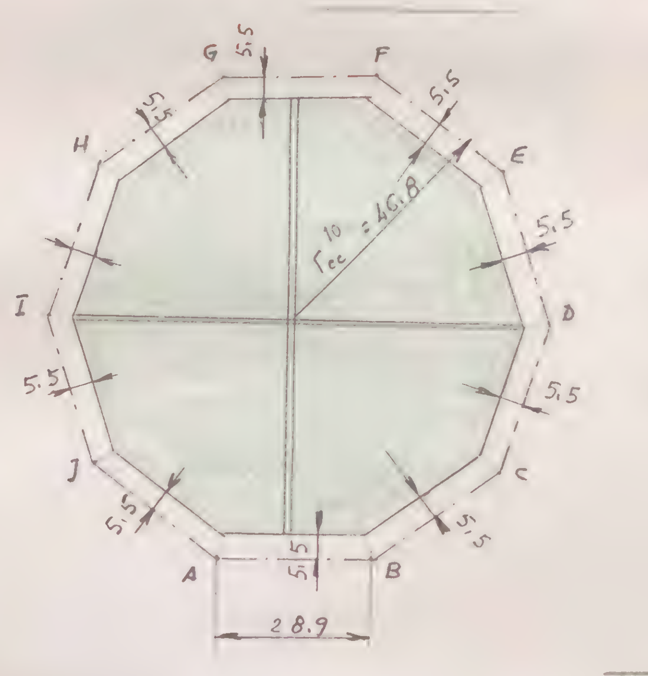


Figura 6

La forma y dimensiones se deducen de las del decágono regular ABCDEFGHIJ de la figura 3, y se detallan en la figura 6

PIEZA Nº 6 12 (u)

Figura 6

PIEZA Nº 7 REFUERZO TRANSVERSAL EN CARAS EXAGONALES REGULARES 40 unidades

La forma y dimensiones se detallan en la figura 7; su colocación, en la figura 5.

Alvarez Julio 1982

PIEZA Nº 7 40 (u)

Figura 7

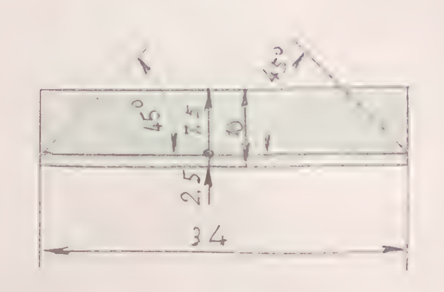


Figura 7

PIEZA Nº 8 REFUERZO TRANSVERSAL EN CARAS DECAGONALES REGULARES 48 unidades

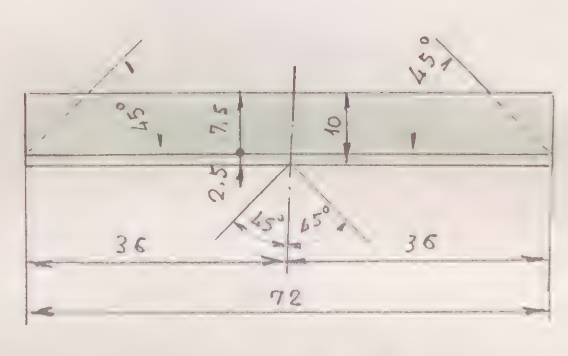


Figura 8

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 7; su colocación, en la figura 8.

PIEZA Nº 8 48 (u)

Figura 7

PIEZA Nº 9 UNIONES ARISTAS 180 unidades

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 9

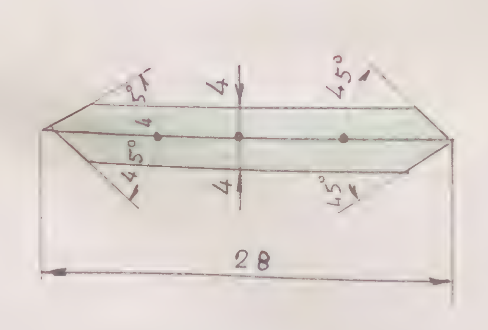


Figura 9

PIEZA Nº 9 180 (u)

Figura 8

PIEZA Nº 10 FORRO COLOREADO EN CARAS CUADRADAS 30 unidades

Su forma y dimensiones se deducen de las del cuadra-

Julio 1982

UNE A4 210 x 297

Modelo M-44.1

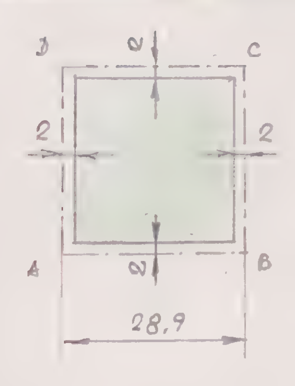


Figura 10

do ABCD de la figura 1, y se detallan en la figura 10

PIEZA Nº 10 30 (u)

Figura 9

PIEZA Nº 11 FORRO COLOREADO EN CARAS EXAGONALES REGULARES 20 unidades

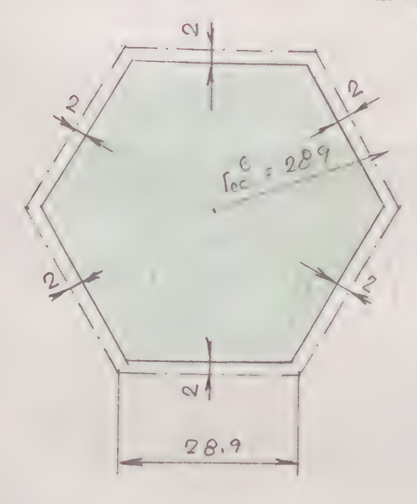


Figura 11

Su forma y dimensiones se deducen de las del exágono regular ABCDEF de la figura 2 y se detallan en la figura 11

PIEZA Nº 11 20 (u)

Figura 9

PIEZA Nº 12 FORRO COLOREADO EN CARAS DECAGONALES REGULARES 20 unidades

Su forma y dimensiones se deducen de las del decágono regular ABCDEFGHIJ de la figura 3, y se detallan en la figura 12

PIEZA Nº 12 20 (u)

Figura 10

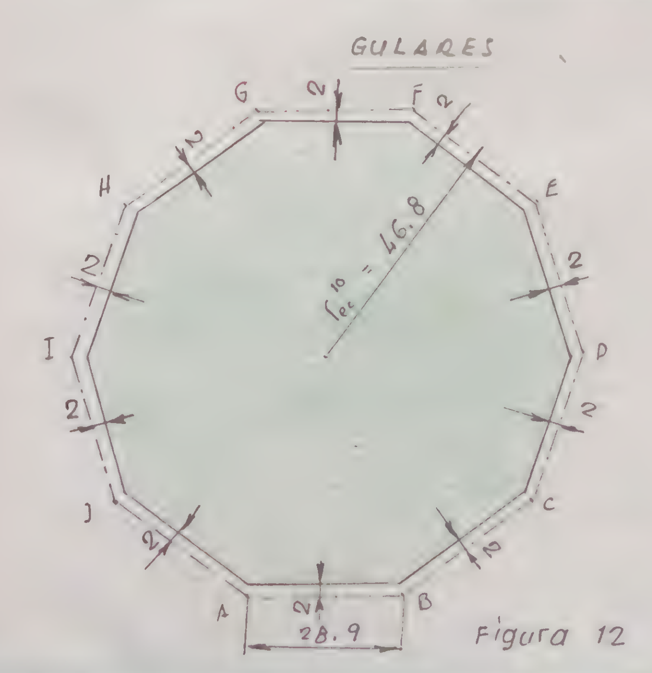


Figura 12

UNE A4 210 x 297

J. Olivares Julio 1982

EN PROYECTO

MODELO CORPÓREO DEL POLIEDRO CONVEXO DE CARAS VACIADAS "ARQUIMEDIANO XII", FORMADO POR TREINTA CARAS CUADRADAS (C_4); VEINTE CARAS EXAGONALES (C_6) Y DOCE CARAS DECAGONALES (C_{10}), CONCURRIENDO EN CADA VÉRTICE $1\,(C_4) + 1\,(C_6) + 1\,(C_{10})$.

Radio de la esfera circunscrita:

$$r_{ec}^{XII} = 110 \text{ mm.}$$

	Ejercicios de construcción de poliedros MODELOS CORPÓREOS	Modelo M-44.2

ENUNCIADO: Construir el modelo corpóreo del poliedro convexo "ARQUIMEDIANO XII", formado por treinta caras cuadradas (C_4); veinte caras exagonales (C_6) y doce caras decagonales (C_{10}), concurriendo en cada vértice $1(C_4) + 1(C_6) + 1(C_{10})$.

Este modelo puede considerarse como una variante del modelo M-44.1, de igual forma y dimensiones, pero con sus caras vaciadas.

DATO ÚNICO DE ESTE EJERCICIO: r_{ec}^{XII} = Radio de la esfera circunscrita

$$r_{ec}^{XII} = 110 \text{ mm}$$

Para la construcción de este modelo, son necesarias las siguientes piezas:

PIEZA Nº 1 CARAS SUPERFICIALES CUADRADAS 30 unidades

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 1

4 4 4 4 28,9

Figura 1

PIEZA Nº 1 30 (u)

Figura 1

PIEZA Nº 2 CARAS SUPERFICIALES EXAGONALES 20 unidades

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 2.

Modelo M-44.2

E D

$r_{cc}^{6} = 28.9$

F C

A B

28.9

Figura 2

PIEZA Nº 2

20 (u)

Figura 2

PIEZA Nº 3 CARAS SUPERFICIALES DECAGONALES REGULARES

12 unidades

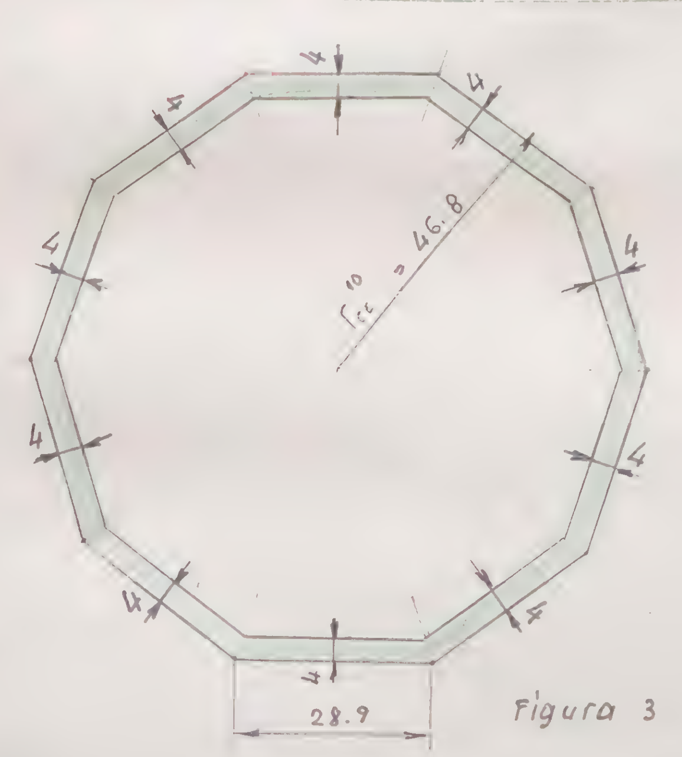


Figura 3

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 3

PIEZA Nº 2

12 (u)

Figura 3

PIEZA Nº 4 UNIONES ARISTAS 180 unidades

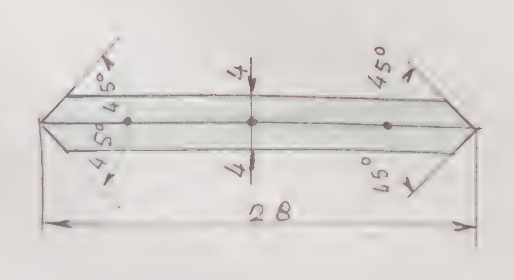


Figura 4

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 4

PIEZA Nº 4 180 (u)

Figura 4

EJECUTADO

VARIANTE DEL MODELO M-44.1, DE IGUAL FORMA QUE ÉSTE, SIENDO MÁS PEQUEÑO EL RADIO DE SU ESFERA CIRCUNSCRITA.

Radio de la esfera circunscrita:

$$r_{ec}^{XII} = 76,1 \text{ mm}$$

	Ejercicios de construcción de poliedros MODELOS CORPÓREOS	Modelo M - 44.5

ENUNCIADO: Construir el modelo corpóreo del poliedro convexo de caras macizas "ARQUIMEDIANO XII", formado por treinta caras cuadradas (C_4); veinte caras exagonales regulares (C_6) y doce caras decagonales regulares (C_{10}), concurriendo en cada vértice $1C_4 + 1C_6 + 1C_{10}$.

Este modelo puede considerarse como una variante del modelo M-44.1, de igual forma y de menor longitud el radio de su esfera circunscrita ($r_{ec}^{XII} = 76.1$ mm < 110 mm).

Para obtener el despiezo de este modelo, utilizaremos, el mismo estudio analítico realizado en el M-44.1, determinando previamente el coeficiente "k" de reducción "$k = 76.1 : 110$" o relación entre los radios correspondientes de sus respectivas esferas circunscritas.

DATO ÚNICO DE ESTE EJERCICIO

$$r_{ec}^{XII} = 76.1 \text{ mm}$$

COEFICIENTE DE REDUCCIÓN

$$k = \frac{76.1}{110} = 0.69\widehat{18}\ldots$$

A continuación presentamos diversas tablas de longitudes y ángulos, cuyas dimensiones han sido reseñadas en las distintas figuras del modelo M-44.1, y de los valores correspondientes a aplicar en la construcción de este nuevo modelo M-44.3, en el que son necesarias las siguientes piezas:

PIEZA Nº 1 CARAS SUPERFICIALES CUADRADAS

30 unidades

La figura 1, ha de construirse con las siguientes cotas modificadas:

FIGURA 1	Longitudes mm	Cotas modificadas mm
Pieza nº 1 30 (u)	28.9	20,0

PIEZA Nº 2 CARAS SUPERFICIALES EXAGONALES REGULARES

20 unidades

La figura 2, ha de construirse con las siguientes cotas modificadas:

FIGURA 2	Longitudes mm	Cotas modificadas mm
Pieza nº 2 20(u)	28.9	20,0

Modelo M-44.3

PIEZA Nº 3 CARAS SUPERFICIALES DECAGONALES REGULARES 12 unidades

La figura 3, ha de construirse con las siguientes cotas modificadas:

FIGURA 3	Longitudes mm	Cotas modificadas mm
Pieza nº 3 12 (u)	46.8 28.9	32.4 20,0

PIEZA Nº 4 REFUERZO NORMAL EN CARAS CUADRADAS 30 unidades

La figura 4, ha de construirse con las siguientes cotas modificadas:

FIGURA 4	Longitudes mm	Cotas modificadas mm
Pieza nº 4 30 (u)	28.9 5.5	20.0 4.5

PIEZA Nº 5 REFUERZO NORMAL EN CARAS EXAGONALES REGULARES 20 unidades

La figura 5, ha de construirse con las siguientes cotas modificadas:

FIGURA 5	Longitudes mm	Cotas modificadas mm
Pieza nº 5 20(u)	28.9 5.5	20.0 4.5

PIEZA Nº 6 REFUERZO NORMAL EN CARAS DECAGONALES REGULARES 12 unidades

(sigue)

La figura 6 ha de construirse con las siguientes cotas modificadas:

FIGURA 6	Longitudes mm	Cotas modificadas mm
Pieza nº 6	46.8	32,4
12 (u)	28.9	20.0
	5.5	4.5

PIEZA Nº 7 REFUERZO TRANSVERSAL EN CARAS EXAGONALES REGULARES

(Se suprime este refuerzo por ser innecesario debido a su pequeño tamaño)

PIEZA Nº 8 REFUERZO TRANSVERSAL EN CARAS DECAGONALES REGULARES (modificado) 24 unidades

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 13

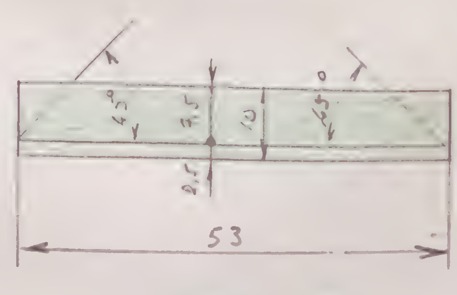


Figura 13

PIEZA Nº 8

24 (u)

Figura 11

		Modelo M-44.3

PIEZA Nº 9 UNIONES ARISTAS 180 unidades

La figura 9, ha de construirse con las siguientes cotas modificadas.

FIGURA 8	Longitudes mm	Cotas modificadas mm
Pieza nº 9 180 (u)	28.0	19,0
	4,0	4.0
	45°	45°

PIEZA Nº 10 FORRO COLOREADO EN CARAS CUADRADAS 30 unidades

La figura 10 ha de construirse con las siguientes cotas modificadas:

FIGURA 9	Longitudes mm	Cotas modificados mm
Pieza nº 10	28.9	20.0
30 (u)	2.0	2.0

PIEZA Nº 11 FORRO COLEREADO EN CARAS EXAGONALES REGULARES 20 unidades

La figura 11, ha de construirse con las mismas cotas modificadas que figuran en el cuadro anterior de la pieza nº 10

PIEZA Nº 12 FORRO COLOREADO EN CARAS DECAGONALES REGULARES 20 unidades

La figura 12, ha de construirse con las siguientes cotas modificadas.

FIGURA 11	Longitudes mm	Cotas modificadas mm
Pieza nº 12	46.8	32.4
20 (u)	28.9	20.0
	2.0	2.0

EJECUTADO

VARIANTE DEL MODELO M - 44.2, DE IGUAL FORMA QUE ÉSTE, SIENDO MÁS PEQUEÑO EL RADIO DE SU ESFERA CIRCUNSCRITA.

Radio de la esfera circunscrita:

$$r_{ec}^{XII} = 76,1 \text{ mm}$$

	Ejercicio de construcción de poliedros MODELOS CORPÓREOS	Modelo M-44.4

ENUNCIADO: Construir el modelo corpóreo del poliedro convexo de caras vaciadas "ARQUIMEDIANO XII", formado por treinta caras cuadradas (C_4); veinte caras exagonales regulares (C_6), y doce caras decagonales regulares (C_{10}), concurriendo en cada vértice $1C_4 + 1C_6 + 1C_{10}$.

Este modelo puede considerarse como una variante del modelo M-44.2, de igual forma, pero siendo menor, el radio de su esfera circunscrita ($r_{ec}^{XII} = 76.1$ mm < 110 mm.

Para obtener el despiece de este modelo, utilizaremos el mismo estudio analítico hecho en el modelo M-44.2, determinando previamente el coeficiente "k" de reducción ($K = 76.10 : 110$), o relación entre los radios correspondientes de sus respectivas esferas circunscritas.

DATO ÚNICO DE ESTE EJERCICIO:

$$r_{ec}^{XII} = 76,1 \text{ mm}$$

COEFICIENTE DE REDUCCIÓN:

$$k = \frac{76.1}{110} = 0.69\,\widehat{18}\ldots$$

UNE A4 210 x 297

[signature] Julio 1982

		Modelo M-44.4

PIEZA Nº 1 CARAS SUPERFICIALES CUADRADAS 30 unidades

La figura 1, ha de construirse con las siguientes cotas modificadas:

FIGURA 1	Longitudes mm	Cotas modificadas mm
Pieza nº 1	28.9	20.0
30 (u)	4.0	3.0

PIEZA Nº 2 CARAS SUPERFICIALES EXAGONALES REGULARES. 20 unidades

La figura 2, ha de construirse con las siguientes cotas modificadas:

FIGURA 2	Longitudes mm	Cotas modificadas mm
Pieza nº 2	28.9	20.0
20 (u)	4.0	3.0

PIEZA Nº 3 CARAS SUPERFICIALES DECAGONALES REGULARES 12 unidades

La figura 3, ha de construirse con las siguientes cotas modificadas:

(sigue)

[signature] Julio 1982

UNE A4 210 x 297

		Modelo M- 44.4

FIGURA 3	Longitudes mm	Cotas modificadas mm
Pieza nº 3 12 (u)	46.8 28.9 4.0	32.4 20.0 3.0

PIEZA Nº 4 UNIONES ARISTAS 180 unidades

La figura 4, ha de construirse con las siguientes cotas modificadas:

FIGURA 4	Longitudes mm	Cotas modificadas mm
Pieza nº 4 180 (u)	28.0 4.0 45°	19.0 3.0 45°

[firma] Julio 1982

MODELO CORPÓREO DEL "ARQUIMEDIANO XII" OBTENIDO POR TRUNCADURA PARALELA DE ARISTAS DE UN DODECAEDRO REGULAR CONVEXO DE ARISTA "a_{12}", A LA DISTANCIA "$y = \frac{1}{5} a_{12}$", SEGUIDA DE UNA TRUNCADURA DE VÉRTICES (O VICEVERSA), A LA DISTANCIA "$x = \frac{3}{5} a_{12}$", AL TOMAR SOBRE CADA ARISTA, Y DESDE SU VÉRTICE, LAS DISTANCIAS "y" Y "x" RESPECTIVAMENTE. EL ARQUIMEDIANO OBTENIDO, SE CONSTRUIRÁ CON LAS CARAS MACIZAS, Y EL DODECAEDRO REGULAR CONVEXO GENERADOR, CON LAS CARAS VACIADAS. Radio de la ~~circunferencia~~ esfera circunscrita al dodecaedro regular

$r_{ec}^{12} = 110$ mm

UNE A4 210 x 297

Ejercicios de construcción de poliedros MODELOS CORPÓREOS	Modelo M-44.5

ENUNCIADO: Construir el modelo corpóreo del "ARQUIMEDIANO XII, obtenido por truncadura paralela de aristas de un dodecaedro regular convexo de arista "a_{12}", a la distancia "$y = \frac{1}{5}a_{12}$", seguida de una truncadura de vértices (o viceversa), a la distancia "$x = \frac{3}{5}a_{12}$", al tomar sobre cada arista, y desde su vértice, las distancias "y" y "x" respectivamente. El Arquimediano obtenido se construirá con las caras macizas, y el dodecaedro regular convexo generador, con las caras vaciadas.

DATO ÚNICO DE ESTE EJERCICIO: r_{ec}^{12} = Radio de la esfera circunscrita al dodecaedro generador:

$$r_{ec}^{12} = 110 \text{ mm}$$

1) GENERALIDADES

En el ESTUDIO PREVIO al modelo M-42.9, desarrollamos y aplicamos una variante al proceso geométrico denominado "TRUNCADURA PARALELA DE ARISTAS", seguida de una "TRUNCADURA DE VÉRTICES" (o viceversa) de un poliedro regular convexo, proceso diferente al estudiado

UNE A4 210 x 297

en el ejercicio M-35.10. Esta nueva aplicación de dicho proceso, da lugar también a la formación de un poliedro núcleo convexo, cuyas características geométricas, detallamos en el párrafo 4 del ejercicio previo al modelo M-42.9. En el caso especial descrito en este enunciado, dicho poliedro núcleo es un ARQUIMEDIANO.

Las características geométricas de este Arquimediano, serán pues las siguientes:

a) Los planos secantes "π_1" de la truncadura paralela de aristas, y los "π_2" de la de vértices, dan lugar a la formación de doce decágonos regulares de lado "$l_{12} = a_A$" situados en las caras del dodecaedro generador.

b) Igualmente dichos planos "π_1" y "π_2", formarán con sus mutuas intersecciones, veinte exágonos regulares de lado "$l_6 = a_A$", asociados a cada vértice.

c) Los planos secantes "π_1" producen a su vez treinta cuadrados paralelos a cada arista del P_8, situados en "π_1", y de lado "$l_4 = a_A$".

Por consiguiente, el poliedro núcleo estará limitado por VEINTE CARAS EXAGONALES REGULARES; DOCE CARAS DECAGONALES REGULARES y TREINTA CARAS CUADRADAS, todas de igual lado.

Estas son las características geométricas del ARQUIME-

DIANO XII, estudiado y representado en el ejercicio G.E. nº...
...-Lámina 44, que detallamos a continuación:

ARQUIMEDIANO XII

1) Número de caras cuadradas ____________ $C_4 = 30$

2) Número de caras exagonales ____________ $C_6 = 20$

3) Númeo de caras decagonales __________ $C_{10} = 12$

4) Número de vértices $= \frac{30 \times 4 + 20 \times 6 + 12 \times 10}{3}$ — $V = 120$

5) Número de aristas $= \frac{30 \times 4 + 20 \times 6 + 12 \times 10}{2}$ — $A = 180$

6) Número de caras en cada vértice $= 1C_4 + 1C_6 + 1C_{10}$

2) POSICIÓN DE LOS PLANOS SECANTES "π_1" Y "π_2"

La posición de los planos secantes "π_1" con lo que se obtiene la "Truncadura paralela de aristas" y la de los "π_2" para la "Truncadura de vértices" con respecto al dodecaedro generador, se obtiene mediante las distancias "y" y "x" respectivamente, tomadas sobre las aristas, y a partir de sus vértices. Para su determinación se han obtenido en el EJERCICIO PREVIO al modelo M-42.9, fórmulas generales que aplicaremos a este ejercicio.

2.1 Cálculo de la distancia "y" que fija la posición del plano "π_1" en la truncadura paralela de aristas.

Se obtiene, en función de la arista "a_{12}" del dodecae-

dos generador, de la fórmula general (2) del modelo M-42.9:

$$y = \frac{r_{ci}^{p} - r_{ci}^{2p}}{\operatorname{sen} \beta} \qquad (2)$$

En esta fórmula sustituiremos los valores generales de sus variables por los particulares siguientes, correspondientes al dodecaedro generador:

a) n = Número de caras del dodecaedro = 12

b) p = Número de lados del polígono de una cara del dodecaedro = 5

c) $r_{ci}^{p} = r_{ci}^{5}$ = Radio de la circunferencia inscrita al pentágono regular de una cara del dodecaedro, de lado "$l_5 = a_{12}$".

d) $r_{ci}^{2p} = r_{ci}^{10}$ = Radio de la circunferencia inscrita al decágono regular de una cara del Arquimediano $\underline{XII}$, de arista "$a_{\underline{XII}}$"

e) β = Angulo interior del pentágono regular de una cara del dodecaedro $= \frac{180° \times (5-2)}{5} = 108°$

De estos valores se deduce:

f) $\boxed{\operatorname{sen} \beta} = \operatorname{sen} 108° = \operatorname{sen}(90° + 18°) = \cos 18° = \boxed{\frac{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{4}}$

(Ver G.P. 1.006)

g) $r_{ci}^{p} = \boxed{r_{ci}^{5}} = \boxed{\sqrt{\frac{5 + 2\sqrt{5}}{20}}\, a_{12}}$ (Ver G.P. (5) 1400-4)

Modelo M-44.5

h) $r_{ci}^{2p} = \boxed{r_{ci}^{10}} = \dfrac{\sqrt{5+2\sqrt{5}}}{2}\, l_{10} = \dfrac{\sqrt{5+2\sqrt{5}}}{2}\, a_{XII} = \dfrac{\sqrt{5+2\sqrt{5}}}{2} \times \dfrac{\sqrt{5}+1}{10}\, a_{12} =$

$$= \frac{\sqrt{(5+2\sqrt{5})(\sqrt{5}+1)^2}}{20}\, a_{12} = \frac{\sqrt{(5+2\sqrt{5})(5+1+2\sqrt{5})}}{20}\, a_{12} =$$

$$= \frac{\sqrt{(5+2\sqrt{5})(6+2\sqrt{5})}}{20}\, a_{12} = \frac{\sqrt{2\,(5+2\sqrt{5})(3+\sqrt{5})}}{20}\, a_{12} =$$

$$= \frac{\sqrt{2\,(15+6\sqrt{5}+5\sqrt{5}+10)}}{20}\, a_{12} = \boxed{\frac{\sqrt{2\,(25+11\sqrt{5})}}{20}\, a_{12}}$$ ((Ver G.P (2) 1400 - 47)

(El valor de "$a_{XII} = \dfrac{\sqrt{5}+1}{10}\, a_{12}$" se deduce posteriormente en el párrafo 3.21)

Sustituyendo los valores f), g) y h) en (2), tendremos:

$$\boxed{y} = \frac{\sqrt{\dfrac{5+2\sqrt{5}}{20}}\, a_{12} - \dfrac{\sqrt{2\,(25+11\sqrt{5})}}{20}\, a_{12}}{\dfrac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}} = \left[\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{20}} - \frac{\sqrt{2\,(25+11\sqrt{5})}}{20}\right] \times \frac{4}{\sqrt{2\,(5+\sqrt{5})}}\, a_{12}$$

$$= [\,\ldots\,] \times \frac{4\sqrt{2\,(5+\sqrt{5})}}{2\,(5+\sqrt{5})}\, a_{12} = [\,\ldots\,] \times \frac{4\sqrt{2\,(5+\sqrt{5}) \times (5-\sqrt{5})}}{2 \times (25-5)}\, a_{12} =$$

$$= [\,\ldots\,] \times \frac{4\sqrt{2\,(5+\sqrt{5})(5-\sqrt{5})^2}}{2 \times 20}\, a_{12} = [\,]\, \frac{\sqrt{2 \times 20\,(5-\sqrt{5})}}{10}\, a_{12} =$$

$$= [\,\ldots\,] \times \frac{2\sqrt{10\,(5-\sqrt{5})}}{10}\, a_{12} = [\,\ldots\,] \times \frac{\sqrt{10\,(5-\sqrt{5})}}{5}\, a_{12} =$$

$$= [\,\ldots\,] \times \sqrt{\frac{2\,(5-\sqrt{5})}{5}}\, a_{12} = \left[\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{20}} \times \sqrt{\frac{2\,(5-\sqrt{5})}{5}} - \frac{\sqrt{2\,(25+11\sqrt{5})}}{20} \times \sqrt{\frac{2\,(5-\sqrt{5})}{5}}\right] a_{12}$$

UNE A4 210 x 297

Calvarez   Junio 1982

Modelo M-44.5

$$= \left[\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{20} \times \frac{2(5-\sqrt{5})}{5}} - \frac{\sqrt{\frac{2(25+11\sqrt{5}) \times 2 \times (5-\sqrt{5})}{5}}}{20} \right] a_{12} =$$

$$= \left[\sqrt{\frac{2(5+2\sqrt{5})(5-\sqrt{5})}{20 \times 5}} - \frac{\sqrt{\frac{4(25+11\sqrt{5})(5-\sqrt{5})}{5}}}{20} \right] a_{12} =$$

$$= \left[\sqrt{\frac{2(25+10\sqrt{5}-5\sqrt{5}-10)}{100}} - \frac{\sqrt{\frac{4(125+55\sqrt{5}-25\sqrt{5}-55)}{5}}}{20} \right] a_{12} =$$

$$= \left[\sqrt{\frac{2(15+5\sqrt{5})}{100}} - \frac{2\sqrt{\frac{70+30\sqrt{5}}{5}}}{20} \right] a_{12} =$$

$$= \left[\frac{\sqrt{10(3+\sqrt{5})}}{10} - \frac{\sqrt{2(7+3\sqrt{5})}}{10} \right] a_{12} = \left[\frac{\sqrt{10} \times \sqrt{3+\sqrt{5}}}{10} - \frac{\sqrt{2} \times \sqrt{7+3\sqrt{5}}}{10} \right] a_{12} =$$

(y siendo $3^2 - (\sqrt{5})^2 = 9 - 5 = 4 = 2^2$ y a su vez $7^2 - (3\sqrt{5})^2 = 49 - 45 = 4 = 2^2$, continuaremos)

$$= \left[\frac{\sqrt{10}\left(\sqrt{\frac{5}{2}} + \sqrt{\frac{1}{2}}\right)}{10} - \frac{\sqrt{2}\left(\sqrt{\frac{9}{2}} + \sqrt{\frac{5}{2}}\right)}{10} \right. a_{12} =$$

$$= \left[\frac{\sqrt{\frac{50}{2}} + \sqrt{\frac{10}{2}}}{10} - \frac{\sqrt{\frac{18}{2}} + \sqrt{\frac{10}{2}}}{10} \right] a_{12} = \left[\frac{\sqrt{25} + \sqrt{5}}{10} - \frac{\sqrt{9} + \sqrt{5}}{10} \right] a_{12} =$$

$$= \frac{5 + \sqrt{5} - 3 - \sqrt{5}}{10} a_{12} = \frac{2}{10} a_{12} = \boxed{\frac{1}{5} a_{12}}$$ de donde se obtiene finalmente

$$\boxed{y = \frac{1}{5} a_{12}}$$

Este valor de "y" justifica el expresado en el enunciado

UNE A4 210 x 297

Alvarez Junio 1982

Modelo M-44.5

2.2) Cálculo de la distancia "x" que fija la posición del plano "π_2" en la truncadura de vértices.

Se obtiene, en función de la arista "a_8" del poliedro generador, de la fórmula general (3) deducida en el ejercicio previo al modelo M-42.9

$$x = \frac{r_{cc}^{p} - r_{ci}^{2p}}{\cos \frac{\beta}{2}} \qquad (3)$$

En esta fórmula sustituiremos los valores generales de sus variables, por los particulares siguientes, correspondientes al dodecaedro general generador

a) n = Número de caras del dodecaedro = 12

b) $a_n = a_{12}$ = Arista del dodecaedro

c) p = Número de lados de los polígonos de las caras del dodecaedro generador = 5

d) $r_{cc}^{p} = r_{cc}^{5}$ = Radio de la circunferencia circunscrita al pentágono regular de una cara del dodecaedro, de lado "a_{12}"

e) $r_{ci}^{2p} = r_{ci}^{10}$ = Radio de la circunferencia inscrita al decágono regular de una cara C_{XII}^{10} del Arquimediano XII, de arista "a_{XII}".

f) β = Ángulo interior del decágono regular de

UNE A4 210 x 297

Junio 1982

Modelo M-44.5

una cara del dodecaedro = $\frac{180° \times (5-2)}{5} = 108°$

De estos valores, se deduce:

g) $\cos\frac{B}{2} = \cos\frac{108°}{2} = \cos 54° = \frac{\sqrt{2(5-\sqrt{5})}}{4}$ (Ver G.P. 1006)

h) $r_{cc}^{p} = r_{cc}^{5} = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}\, a_{12}$ (Ver G.P. (3) 1.400-44)

i) $r_{ci}^{2p} = r_{ci}^{10} = \frac{\sqrt{2(25+11\sqrt{5})}}{20}\, a_{12}$ (Ver cálculo de "y"

Sustituyendo los valores g), h), i) en (3), tendremos:

$$x = \frac{\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}\, a_{12} - \frac{\sqrt{2(25+11\sqrt{5})}}{20}\, a_{12}}{\frac{\sqrt{2(5-\sqrt{5})}}{4}} = \frac{\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}} - \frac{\sqrt{2(25+11\sqrt{5})}}{20}}{\frac{\sqrt{2(5-\sqrt{5})}}{4}}\, a_{12} =$$

$$= \left[\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}} - \frac{\sqrt{2(25+11\sqrt{5})}}{20}\right] \times \frac{4}{\sqrt{2(5-\sqrt{5})}}\, a_{12} = [\ldots] \times \frac{4\sqrt{2(5-\sqrt{5})}}{2(5-\sqrt{5})}\, a_{12} =$$

$$= [\ldots] \times \frac{2\sqrt{2(5-\sqrt{5})} \times (5+\sqrt{5})}{2(25-5)}\, a_4 = [\ldots] \times \frac{2\sqrt{2(5-\sqrt{5})(5+\sqrt{5})^2}}{20}\, a_{12} =$$

$$= [\ldots] \times \frac{2\sqrt{2 \times 20 \times (5+\sqrt{5})}}{20}\, a_{12} = [\ldots] \times \frac{\sqrt{40(5+\sqrt{5})}}{10}\, a_{12} =$$

$$= [\ldots] \times \frac{2\sqrt{10(5+\sqrt{5})}}{10}\, a_{12} = [\ldots] \times \frac{\sqrt{10(5+\sqrt{5})}}{5}\, a_{12} =$$

$$= \left[\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}} - \frac{\sqrt{2(25+11\sqrt{5})}}{20}\right] \times \frac{\sqrt{10(5+\sqrt{5})}}{5}\, a_{12} =$$

UNE A4 210 x 297

Junio 1982

$$= \left[\frac{\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10} \times 10\,(5+\sqrt{5})}}{5} - \frac{\sqrt{2\,(25+11\sqrt{5}) \times 10 \times (5+\sqrt{5})}}{100} \right] a_{12} =$$

$$= \left[\frac{\sqrt{\frac{(5+\sqrt{5})^2 \times 10}{10}}}{5} - \frac{\sqrt{20\,(25+11\sqrt{5})(5+\sqrt{5})}}{100} \right] a_{12} =$$

$$= \left[\frac{5+\sqrt{5}}{5} - \frac{2\sqrt{(125+55\sqrt{5}+25\sqrt{5}+55)\times 5}}{100} \right] a_{12} =$$

$$= \left[\frac{5+\sqrt{5}}{5} - \frac{\sqrt{5\,(180+80\sqrt{5})}}{50} \right] a_{12} = \left[\frac{5+\sqrt{5}}{5} - \frac{\sqrt{5 \times 20 \times (9+4\sqrt{5})}}{50} \right] a_{12} =$$

$$= \left[\frac{5+\sqrt{5}}{5} - \frac{10\sqrt{9+4\sqrt{5}}}{50} \right] a_{12} = \left[\frac{5+\sqrt{5}}{5} - \frac{\sqrt{9+4\sqrt{5}}}{5} \right] a_{12}$$

(Y siendo $9^2 - (4\sqrt{5})^2 = 81 - 80 = 1^2$, tendremos:)

$$= \left[\frac{5+\sqrt{5}}{5} - \frac{\sqrt{\frac{8}{2}} + \sqrt{\frac{10}{2}}}{5} \right] a_{12} = \left[\frac{5+\sqrt{5}}{5} - \frac{2+\sqrt{5}}{5} \right] a_{12} =$$

$$= \frac{5+\sqrt{5}-2-\sqrt{5}}{5}\, a_{12} = \boxed{\frac{3}{5}\, a_{12}}$$

De donde se obtiene finalmente:

$$\boxed{x = \frac{3}{5}\, a_{12}}$$

Este valor de "x" justifica el espresado en el enunciado.

3) CONSTRUCCIÓN DE ESTE MODELO

Para la construcción de este modelo, son necesarias las si-

UNE A4 210 x 297

		Modelo M-44.5

guientes piezas:

3.1) DODECAEDRO REGULAR GENERADOR, DE CARAS VACIADAS

El valor de "a_{12}" se obtiene de la fórmula "$r_{ec}^{12} = \frac{\sqrt{15}+\sqrt{3}}{4} a_{12}$" deducida en el ejercicio G.E. nº....- Lámina 4.- Despejando en ella "a_{12}", será:

$$\boxed{a_{12}} = r_{ec}^{12} : \frac{\sqrt{15}+\sqrt{3}}{4} = \frac{4}{\sqrt{15}+\sqrt{3}} r_{ec}^{12} = \frac{4(\sqrt{15}-\sqrt{3})}{15-3} r_{ec}^{12} = \boxed{\frac{\sqrt{15}-\sqrt{3}}{3} r_{ec}^{12}}$$

PIEZA Nº 1 CARAS SUPERFICIALES PENTAGONALES REGULARES

12 unidades

Su forma y dimensiones son iguales a las de la figura nº 1 del ejercicio M-4.102.

PIEZA Nº 2 UNIONES ARISTAS 30 unidades

Su forma y dimensiones son iguales a las de la figura 2 del ejercicio M-4.102.

3.2) ARQUIMEDIANO XII, (NÚCLEO DEL DODECAEDRO GENERADOR), DE CARAS MACIZAS, INCLUIDO LAS PIRÁMIDES AUXILIARES DE FIJACIÓN DE LOS VÉRTICES DEL DODECAEDRO GENERADOR, A LAS CARAS EXAGONALES DEL ARQUIMEDIANO XII.

3.21 Cálculo de la longitud "a_{XII}" de la arista del ARQUIMEDIANO XII, engendrado por el dodecaedro generador.

Se obtiene en función de la arista "a_{12}" del dodecaedro generador, de la fórmula (1) deducida en el ESTUDIO PREVIO al modelo M-42.9

$$a_{XII} = \frac{\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} \operatorname{sen} \varphi}{\operatorname{sen} \varphi \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{4} + 1} a_n \qquad (1)$$

En esta fórmula, sustituiremos los valores generales de sus variables por los particulares siguientes, correspondientes al dodecaedro regular convexo generador:

a) n = Número de caras del dodecaedro. = 12

b) $a_n = a_{12}$ = Arista del dodecaedro.

c) α = Ángulo central del pentágono regular de una cara del dodecaedro $= \frac{360^\circ}{5} = 72^\circ$

d) φ = Semiángulo del diedro formado por dos caras consecutivas del dodecaedro.

De estos valores se deducen:

e) $\operatorname{sen} \varphi = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}$ (Ver G.P. nº... Lámina 4)

f) $\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} = \operatorname{ctg} \frac{72^\circ}{2} = \operatorname{ctg} 36^\circ = 1 : \operatorname{tg} 36^\circ = 1 : \sqrt{5 - 2\sqrt{5}} =$

Chávarri Junio 1982

$$= \sqrt{\frac{1}{5-2\sqrt{5}}} = \boxed{\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}}}$$ · (Ver G. P. 1006)

g) $\boxed{\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{4}} = \operatorname{ctg}\frac{72^\circ}{4} = \operatorname{ctg} 18^\circ = 1 : \operatorname{tg} 18^\circ = 1 : \sqrt{\frac{5-2\sqrt{5}}{5}} =$

$$= \sqrt{\frac{5}{5-2\sqrt{5}}} = \sqrt{\frac{5(5-2\sqrt{5})}{5}} = \boxed{\sqrt{5+2\sqrt{5}}}$$ (G. P. 1006)

Sustituyendo los valores e), f), g) en (1), tendremos:

$$\boxed{a_{x11}} = \frac{\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}} \times \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}}{\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}} \times \sqrt{5+2\sqrt{5}} + 1}\, a_{12} = \frac{\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5} \times \frac{5+\sqrt{5}}{10}}}{\sqrt{\frac{(5+\sqrt{5})(5+2\sqrt{5})}{10}} + 1}\, a_{12} =$$

$$= \frac{\sqrt{\frac{(5+2\sqrt{5})(5+\sqrt{5})}{50}}}{\sqrt{\frac{25+5\sqrt{5}+10\sqrt{5}+10}{10}} + 1}\, a_{12} = \frac{\sqrt{\frac{25+10\sqrt{5}+5\sqrt{5}+10}{50}}}{\sqrt{\frac{35+15\sqrt{5}}{10}} + 1}\, a_{12} =$$

$$= \frac{\sqrt{\frac{35+15\sqrt{5}}{50}}}{\sqrt{\frac{35+15\sqrt{5}}{10}} + 1}\, a_{12} = \frac{\sqrt{\frac{7+3\sqrt{5}}{10}}}{\sqrt{\frac{7+3\sqrt{5}}{2}} + 1}\, a_{12} =$$

$$= \frac{\sqrt{\frac{7+3\sqrt{5}}{10}} \times \left[\sqrt{\frac{7+3\sqrt{5}}{2}} - 1\right]}{\frac{7+3\sqrt{5}}{2} - 1}\, a_{12} = \frac{\sqrt{\frac{(7+3\sqrt{5})^2}{20}} - \sqrt{\frac{7+3\sqrt{5}}{10}}}{\frac{7+3\sqrt{5}-2}{2}}\, a_{12} =$$

$$= \frac{\frac{7+3\sqrt{5}}{\sqrt{20}} - \frac{\sqrt{7+3\sqrt{5}}}{\sqrt{10}}}{\frac{5+3\sqrt{5}}{2}}\, a_{12} = \frac{\frac{7+3\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} - \frac{\sqrt{7+3\sqrt{5}}}{\sqrt{10}}}{\frac{5+3\sqrt{5}}{2}}\, a_{12} =$$

$$= \frac{\frac{7+3\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} - \frac{\sqrt{7+3\sqrt{5}}}{\sqrt{10}}}{\frac{5+3\sqrt{5}}{2}}\, a_{12} = \frac{2 \times \frac{7+3\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} - 2 \times \frac{\sqrt{7+3\sqrt{5}}}{\sqrt{10}}}{5+3\sqrt{5}}\, a_{12} =$$

UNE A4 210 x 297

Modelo M-44.5

$$= \frac{\dfrac{7\sqrt{5}+15}{5} - 2\times\dfrac{\sqrt{7+3\sqrt{5}}}{\sqrt{10}}}{5+3\sqrt{5}}\, a_{12} =$$

(y siendo $7^2 - (3\sqrt{5})^2 = 49 - 45 = 4 = 2^2$, tendremos:)

$$= \frac{\dfrac{7\sqrt{5}+15}{5} - 2\times\dfrac{\sqrt{\frac{9}{2}}+\sqrt{\frac{5}{2}}}{\sqrt{10}}}{5+3\sqrt{5}}\, a_{12} = \frac{\dfrac{7\sqrt{5}+15}{5} - 2\times\left[\sqrt{\dfrac{9}{20}}+\sqrt{\dfrac{5}{20}}\right]}{5+3\sqrt{5}}\, a_{12}$$

$$= \frac{\dfrac{7\sqrt{5}+15}{5} - 2\left[\dfrac{3}{2\sqrt{5}}+\dfrac{\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}\right]}{5+3\sqrt{5}}\, a_{12} = \frac{\dfrac{7\sqrt{5}+15}{5} - 2\left[\dfrac{3\sqrt{5}}{10}+\dfrac{5}{10}\right]}{5+3\sqrt{5}}\, a_{12}$$

$$= \frac{\dfrac{7\sqrt{5}+15}{5} - \dfrac{3\sqrt{5}+5}{5}}{5+3\sqrt{5}}\, a_{12} = \frac{7\sqrt{5}+15-3\sqrt{5}-5}{5(3\sqrt{5}+5)}\, a_{12} =$$

$$= \frac{4\sqrt{5}+10}{5(3\sqrt{5}+5)}\, a_{12} = \frac{(4\sqrt{5}+10)(3\sqrt{5}-5)}{5\times 20}\, a_{12} = \frac{60+30\sqrt{5}-20\sqrt{5}-50}{100}\, a_{12} =$$

$$= \frac{10+10\sqrt{5}}{100}\, a_{12} = \boxed{\frac{\sqrt{5}+1}{10}\, a_{12}}$$

De donde se deduce finalmente:

$$\boxed{a_{XII} = \frac{\sqrt{5}+1}{10}\, a_{12}}$$

Puede obtenerse "a_{XII}" en función de "r_{ec}^{12}" (dato de este modelo, sustituyendo el valor "$a_{12} = \dfrac{\sqrt{15}-\sqrt{3}}{3}\, r_{ec}^{12}$", obteni-

UNE A4 210 x 297

[signature] Junio 1982

do en el párrafo 3.1 de este ejercicio.

Así pues, tendremos:

$$\boxed{a_{XII}} = \frac{\sqrt{5}+1}{10}\, a_{12} = \frac{\sqrt{5}+1}{10} \times \frac{\sqrt{15}-\sqrt{3}}{3}\, r_{ec}^{12} = \frac{(\sqrt{5}+1)(\sqrt{15}-\sqrt{3})}{30}\, r_{ec}^{12} =$$

$$= \frac{\sqrt{75}+\sqrt{15}-\sqrt{15}-\sqrt{3}}{30}\, r_{ec}^{12} = \frac{5\sqrt{3}-\sqrt{3}}{30}\, r_{ec}^{12} = \frac{4\sqrt{3}}{30}\, r_{ec}^{12} = \boxed{\frac{2\sqrt{3}}{15}\, r_{ec}^{12}}$$

El valor numérico de "a_{XII}" será pues:

$$\boxed{a_{XII}} = \frac{2\sqrt{3}}{15}\, r_{ec}^{12} = 0,23\,09\,40\,10\,8\ldots \times 110 = \boxed{25.4 \text{ mm}}$$

PIEZA Nº 3 CARAS SUPERFICIALES CUADRADAS

30 unidades

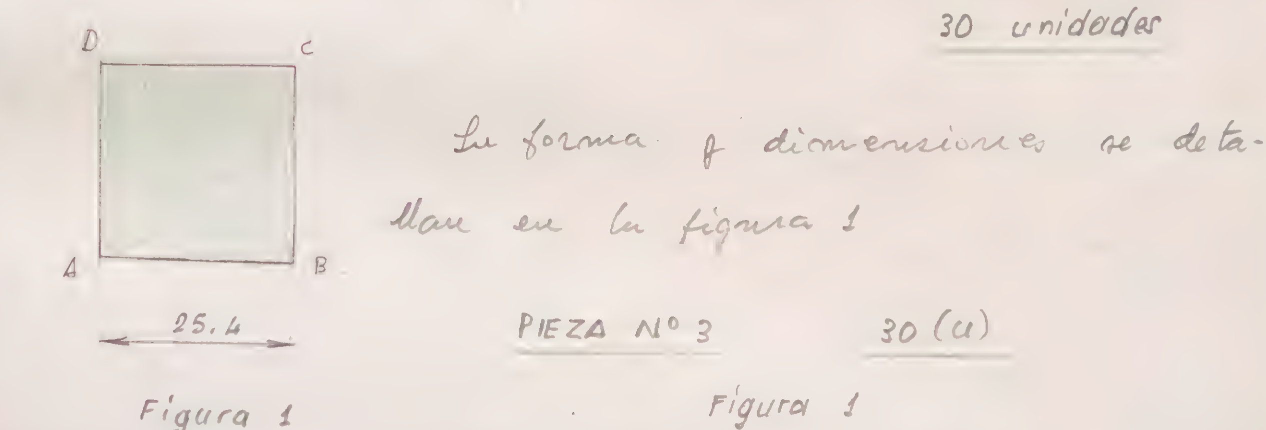


Figura 1

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 1

PIEZA Nº 3 30 (u)

Figura 1

PIEZA Nº 4 CARAS SUPERFICIALES EXAGONALES REGULARES

20 unidades

Su forma y dimensiones se detallan en la figura nº 2

MODELO M-44.5

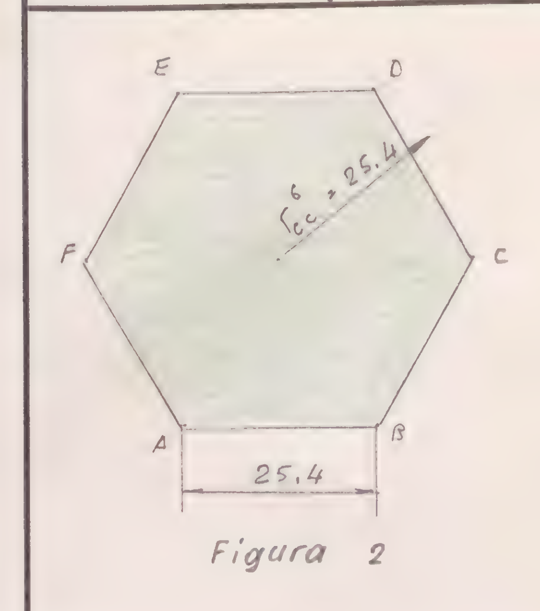


Figura 2

PIEZA Nº 4

20(u)

Figura 2

PIEZA Nº 5 CARAS SUPERFICIALES DECAGONALES REGULARES

12 unidades

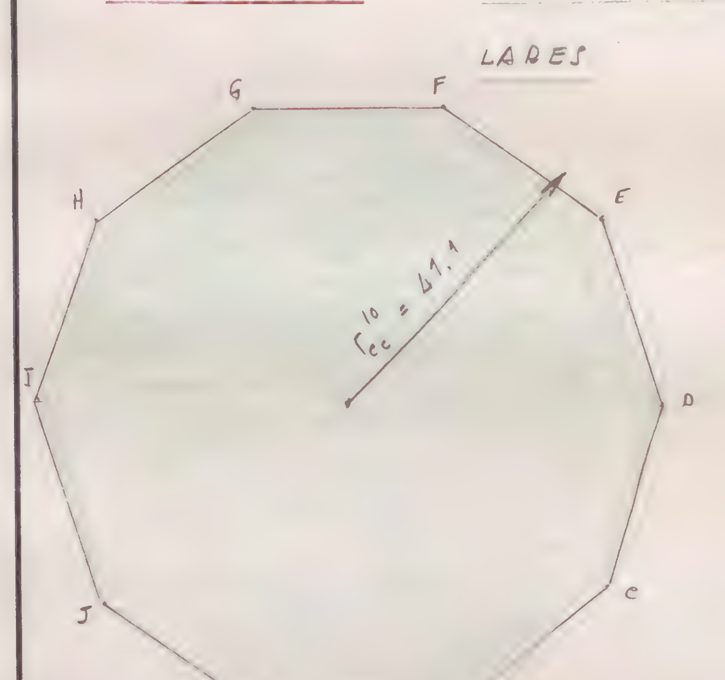


Figura 3

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 3

$$r_{cc}^{10} = \frac{\sqrt{5}+1}{2} \times 25.4 = 41.1 \text{ mm}$$

PIEZA Nº 5

12(u)

Figura 3

PIEZA Nº 6 REFUERZO NORMAL EN CARAS CUADRADAS

30 unidades

Su forma y dimensiones se deducen de las del cuadra-

do ABCD de la figura 1, y se detallan en la figura 4

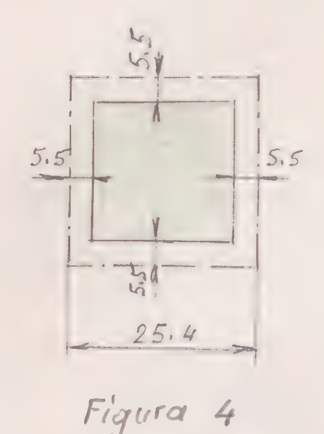


Figura 4

PIEZA Nº 6

30 (4)

Figura 4

PIEZA Nº 7 REFUERZO NORMAL EN CARAS EXAGONALES REGULARES 20 unidades

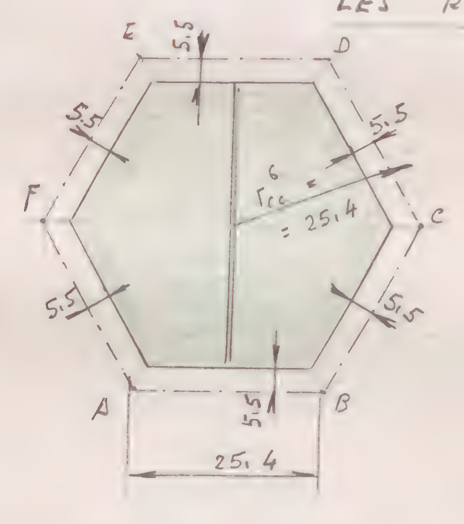


Figura 5

Su forma y dimensiones se deducen de las del exágono regular convexo ABCDEF de la figura 3, y se detallan en la figura 5

PIEZA Nº 7 20 (C1)

Figura 5

PIEZA Nº 8 REFUERZO NORMAL EN CARAS DECAGONALES REGULARES 12 unidades

Su forma y dimensiones se deducen de las decágono regular convexo de la figura 3, y se detallan en la figura 6

Modelo M- 44.5

PIEZA Nº 8

12 (u)

Figura 6

Figura 6

PIEZA Nº 9   REFUERZO TRANSVERSAL EN CARAS EXAGONALES REGULARES   40 unidades

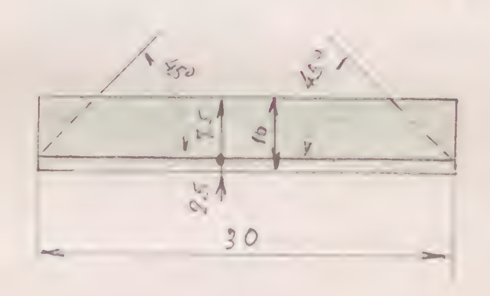


Figura 7

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 7; su colocación, en la figura 5.

PIEZA Nº 9   40 (u)

Figura 7

PIEZA Nº 10   REFUERZO TRANSVERSAL EN CARAS DECAGONALES REGULARES   48 unidades

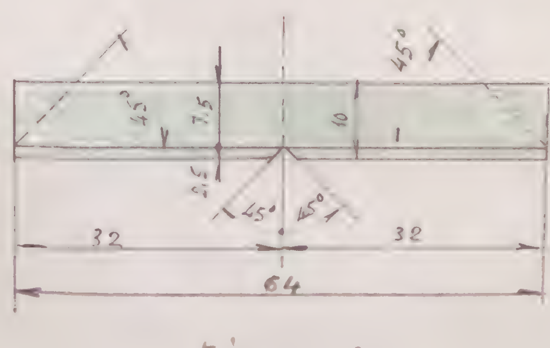


Figura 8

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 8; su colocación, en la figura 6

PIEZA Nº 10   48 (u)

Figura 8

Alvarez   Junio 1982

Modelo M-44.5

PIEZA Nº 11 UNIONES ARISTAS 180 unidades

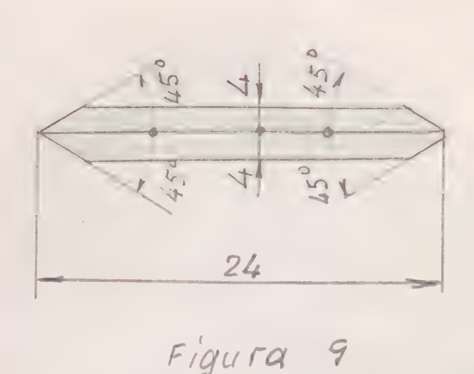


Figura 9

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 9

PIEZA Nº 11 120 (u)

Figura 9

PIEZA Nº 12 FORRO COLOREADO EN CARAS CUADRADAS

30 unidades

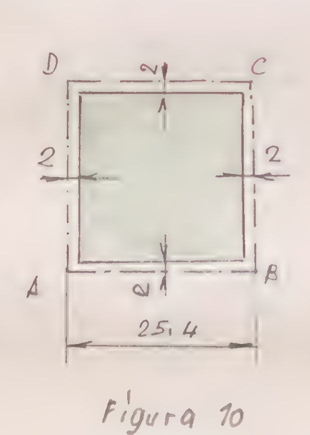


Figura 10

Su forma y dimensiones se deducen de las del cuadrado ABCD de la figura 1 y se detallan en la figura 10

PIEZA Nº 12 30 (u)

Figura 10

PIEZA Nº 13 FORRO COLOREADO EN CARAS EXAGONALES REGULARES

20 unidades

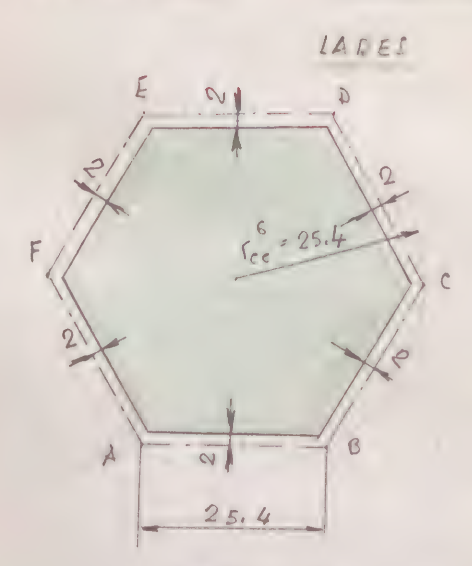


Figura 11

Su forma y dimensiones se deducen de las del exágono regular ABCDEF de la figura 2, y se detallan en la figura 11

PIEZA Nº 13 20 (u)

Figura 11

UNE A4 210 x 297

Edwards Junio 1982

PIEZA Nº 14 FORRO COLOREADO EN CARAS DECAGONALES REGULARES. 20 unidades

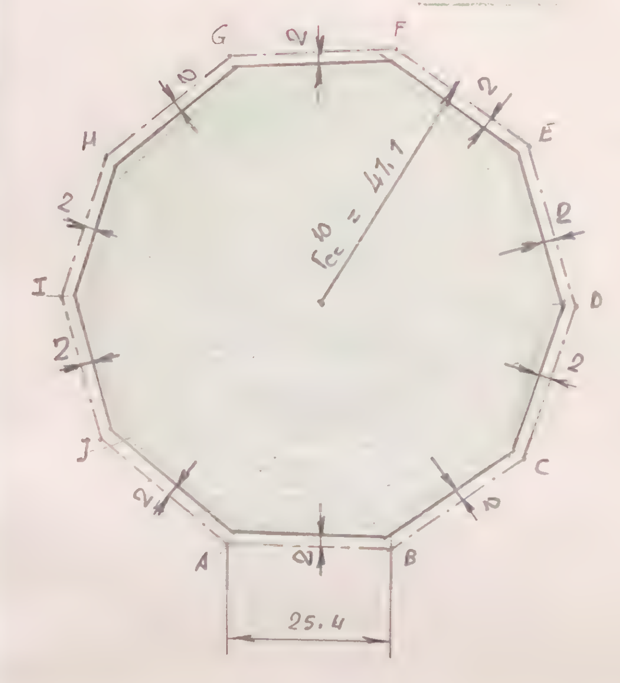


Figura 12

Su forma y dimensiones se deducen de las del decágono AB... CDEFGHIJ de la figura 3. y se detallan en la figura 12

PIEZA Nº 14 20 (u)

Figura 12

3.22) Cálculo de la arista lateral "a_l" de las pirámides auxiliares exagonales que fijan la posición de los vértices del dodecaedro generador con respecto al ARQUIMEDIANO XII.

Se obtiene, en función de la arista "a_{12}" del dodecaedro generador, de la fórmula (4) deducida en el ejercicio previo al modelo M-42.9

$$a_l = \sqrt{\left(r_{cc}^{p} - r_{ci}^{2p}\right)^2 + \left(\frac{d_{x11}}{2}\right)^2} \qquad (4)$$

En esta fórmula general, sustituiremos los valores de sus variables por los particulares siguientes, correspondientes al dodecaedro generador:

		Modelo M-44.5

a) n = Número de caras del dodecaedro = 12

b) $a_n = a_{12}$ = Arista del dodecaedro

c) p = Número de lados de los polígonos de las caras del dodecaedro = 5

d) $r_{cc}^{p} = r_{cc}^{5}$ = Radio de la circunferencia circunscrita al pentágono regular de una cara del dodecaedro, de lado "a_{12}"

e) $r_{ci}^{2p} = r_{ci}^{10}$ = Radio de la circunferencia inscrita al decágono regular de una cara del Arquimediano XII, de arista "a_{XII}"

f) $a_A = a_{XII}$ = Arista del Arquimediano XII.

De estos valores se deduce:

g) $\boxed{a_{XII}} = \boxed{\frac{\sqrt{5}+1}{10}\, a_{12}}$ (Ver cálculo de a_{XII} en parrafo 3.21)

h) $r_{cc}^{p} = \boxed{r_{cc}^{5}} = \boxed{\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}\, a_{12}}$ (Ver cálculo de "x", parraf. 2.2)

i) $r_{ci}^{2p} = \boxed{r_{ci}^{10}} = \boxed{\frac{\sqrt{2\left(25+11\sqrt{5}\right)}}{20}\, a_{12}}$ (Ver cálculo de "y" parrafo. 2.1)

Sustituyendo los valores g), h), i) en (4), tendremos:

$$\boxed{a_e} = \sqrt{\left[\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}\, a_{12} - \frac{\sqrt{2\left(25+11\sqrt{5}\right)}}{20}\, a_{12}\right]^2 + \left[\frac{\sqrt{5}+1}{10} : 2\, a_{12}\right]^2} =$$

Modelo M-44,5

$$= \sqrt{\left[\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}} - \frac{\sqrt{2(25+11\sqrt{5})}}{20}\right]^2 + \left[\frac{\sqrt{5}+1}{20}\right]^2}\; a_{12} =$$

$$= \sqrt{\left[\frac{5+\sqrt{5}}{10} + \frac{2(25+11\sqrt{5})}{400} - 2 \times \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}} \times \frac{\sqrt{2(25+11\sqrt{5})}}{20}\right] + \frac{(\sqrt{5}+1)^2}{400}}\; a_{12} =$$

$$= \sqrt{\left[\frac{40(5+\sqrt{5})}{400} + \frac{2(25+11\sqrt{5})}{400} + \frac{5+1+2\sqrt{5}}{400}\right] - \frac{2}{20}\sqrt{\frac{2(5+\sqrt{5})(25+11\sqrt{5})}{10}}}\; a_{12} =$$

$$= \sqrt{\left[\frac{20(5+\sqrt{5})}{200} + \frac{25+11\sqrt{5}}{200} + \frac{3+\sqrt{5}}{200}\right] - \frac{1}{10}\sqrt{\frac{2(125+25\sqrt{5}+55\sqrt{5}+55)}{10}}}\; a_{12} =$$

$$= \sqrt{\frac{100+20\sqrt{5}+25+11\sqrt{5}+3+\sqrt{5}}{200} - \frac{1}{10}\sqrt{\frac{180+80\sqrt{5}}{5}}}\; a_{12}$$

$$= \sqrt{\frac{128+32\sqrt{5}}{200} - \frac{1}{10}\sqrt{36+16\sqrt{5}}}\; a_{12} = \sqrt{\frac{16+4\sqrt{5}}{25} - \frac{1}{10}\sqrt{36+16\sqrt{5}}}\; a_{12} =$$

$$= \sqrt{\frac{16+4\sqrt{5}}{25} - \frac{1}{10}\sqrt{4(9+4\sqrt{5})}}\; a_{12} = \sqrt{\frac{16+4\sqrt{5}}{25} - \frac{1}{5}\sqrt{9+4\sqrt{5}}}\; a_{12} =$$

(y siendo $9^2 - (4\sqrt{5})^2 = 81 - 80 = 1 = 1^2$, tendremos:)

$$= \sqrt{\frac{16+4\sqrt{5}}{25} - \frac{1}{5}\left(\sqrt{\frac{10}{2}} + \sqrt{\frac{8}{2}}\right)}\; a_{12} = \sqrt{\frac{16+4\sqrt{5}}{25} - \frac{1}{5}\left(\sqrt{5}+2\right)}\; a_{12} =$$

$$= \sqrt{\frac{16+4\sqrt{5}}{25} - \frac{5(\sqrt{5}+2)}{25}}\; a_{12} = \sqrt{\frac{16+4\sqrt{5}-5\sqrt{5}-10}{25}}\; a_{12} =$$

De donde tendremos finalmente:

$$= \sqrt{\frac{6-\sqrt{5}}{25}}\; a_{12} = \boxed{\frac{\sqrt{6-\sqrt{5}}}{5}\; a_{12}}$$

UNE A4 210 x 297

T. Alvarez Junio 1982

Modelo M - 44.5

$$a_\ell = \frac{\sqrt{6-\sqrt{5}}}{5}\, a_{12}$$

Puede obtenerse "a_ℓ" en función de "r_{ec}^{12}" (dato de este ejercicio) sustituyendo "$a_{12} = \frac{\sqrt{15}-\sqrt{3}}{3}\, r_{ec}^{12}$", valor obtenido en el párrafo 3.1 de este ejercicio. Así pues, será:

$$a_\ell = \frac{\sqrt{6-\sqrt{5}}}{5}\, a_{12} = \frac{\sqrt{6-\sqrt{5}}}{5} \times \frac{\sqrt{15}-\sqrt{3}}{3}\, r_{ec}^{12} = \frac{\sqrt{(6-\sqrt{5})(\sqrt{15}-\sqrt{3})^2}}{15}\, r_{ec}^{12} =$$

$$= \frac{\sqrt{(6-\sqrt{5})(15+3-2\sqrt{45})}}{15}\, r_{ec}^{12} = \frac{\sqrt{(6-\sqrt{5})(18-2\times 3\sqrt{5})}}{15}\, r_{ec}^{12} =$$

$$= \frac{\sqrt{(6-\sqrt{5})(18-6\sqrt{5})}}{15}\, r_{ec}^{12} = \frac{\sqrt{6(6-\sqrt{5})(3-\sqrt{5})}}{15}\, r_{ec}^{12} = \frac{\sqrt{6(18-3\sqrt{5}-6\sqrt{5}+5)}}{15}\, r_{ec}^{12} =$$

$$= \frac{\sqrt{6(23-9\sqrt{5})}}{15}\, r_{ec}^{12}$$

Su valor numérico será pues:

$$a_\ell = \frac{\sqrt{6(23-9\sqrt{5})}}{15} \times r_{ec}^{12} = 0,27\,69\,06\,15\,6... \times 110 = 30,46 \text{ mm}$$

PIEZA Nº 14 DESARROLLO LATERAL DE LAS PIRÁMIDES AUXILIARES EXAGONALES 20 unidades

Su forma y dimensiones se detallan en la figura nº 12

$$\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = \overline{DE} = \overline{EF} = \overline{FA} = 25,4 \text{ mm}$$

(figura en la h 23)

Modelo M-44.5

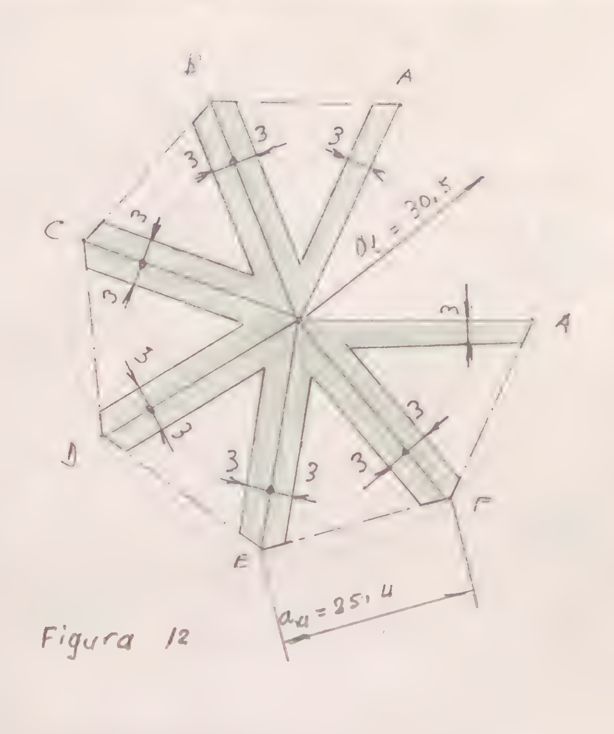


Figura 12

PIEZA Nº 14

20 (u)

Figura 12

PIEZA Nº 15 UNIONES ARISTAS DE LAS PIRÁMIDES EXAGONALES 120 unidades

La forma y dimensiones se detallan en la figura 13

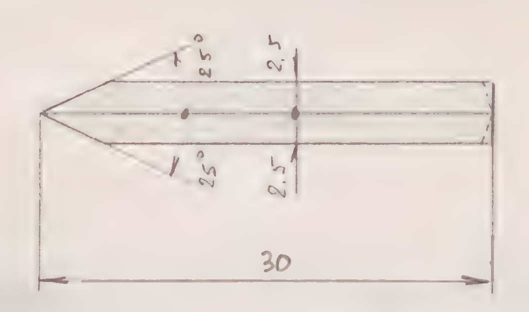


Figura 13

PIEZA Nº 15

120 (u)

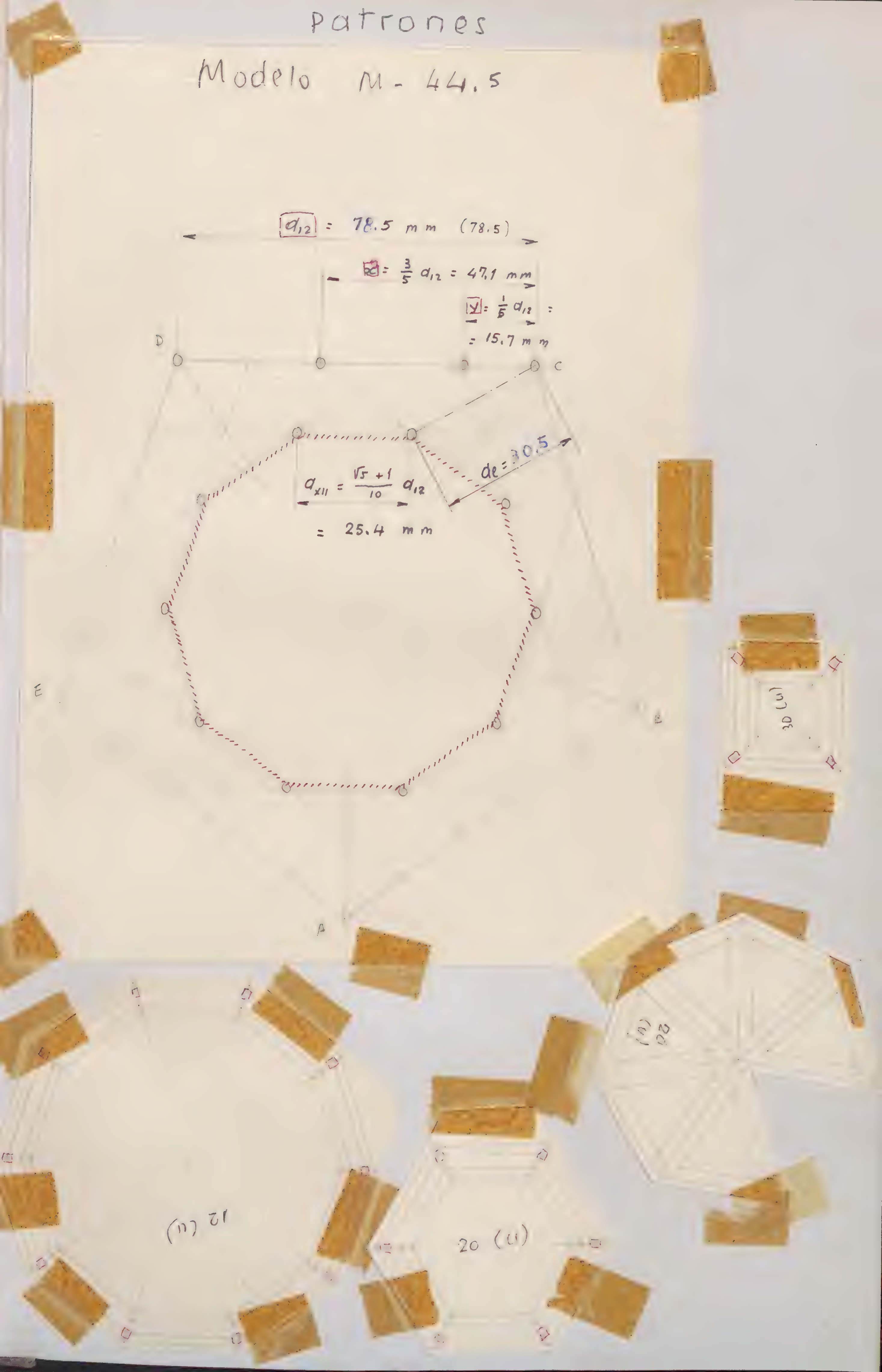
Figura 13

UNE A4 210 x 297

Junio 1982

Patrones

Modelo M - 44.5



EJECUTADO

MODELO CORPÓREO DEL "ARQUIMEDIANO XII" OBTENIDO POR TRUNCADURA PARALELA DE ARISTAS DE UN ICOSAEDRO REGULAR CONVEXO DE ARISTA "a_{20}", A LA DISTANCIA "$y = \frac{3-\sqrt{5}}{6} a_{20}$", SEGUIDA DE UNA TRUNCADURA DE VÉRTICES (o viceversa), A LA DISTANCIA "$x = \frac{5-\sqrt{5}}{6} a_{20}$", AL TOMAR SOBRE CADA ARISTA, Y DESDE SU VÉRTICE, LAS distancias "y" y "x" RESPECTIVAMENTE. EL ARQUIMEDIANO OBTENIDO, SE CONSTRUIRÁ CON LAS CARAS MACIZAS, Y EL ICOSAEDRO REGULAR CONVEXO GENERADOR, CON LAS CARAS VACIADAS.

Radio de la esfera circunscrita al icosaedro generador:

$$r_{ec}^{20} = 110 \text{ mm}$$

Ejercicios de construcción de poliedros MODELOS CORPÓREOS	Modelo M-44.6

ENUNCIADO: Construir el modelo corpóreo del "ARQUIMEDIANO XII", obtenido por truncadura paralela de aristas de un icosaedro regular convexo de arista "a_{20}", a la distancia "$y = \frac{3-\sqrt{5}}{6} a_{20}$", seguida de una truncadura de vértices (o viceversa), a la distancia "$x = \frac{5-\sqrt{5}}{6} a_{20}$", al tomar sobre cada arista, y desde su vértice, las distancias "y" y "x" respectivamente. El Arquimediano obtenido, se construirá con las caras macizas, y el icosaedro regular convexo generador, con las caras vaciadas.

DATO ÚNICO DE ESTE EJERCICIO: r_{ec}^{20} = Radio de la esfera circunscrita al icosaedro regular generador:

$$r_{ec}^{20} = 110 \text{ mm}$$

1) GENERALIDADES

En el ESTUDIO PREVIO al modelo M-42.9, desarrollamos y aplicamos una variante al proceso geométrico denominado "TRUNCADURA PARALELA DE ARISTAS", seguida de una "TRUNCADURA DE VÉRTICES" (o viceversa), de un poliedro regular convexo, proceso diferente al estudiado en el ejercicio M-35.10. Esta nueva aplicación de dicho proceso, da lugar también a la formación de un poliedro núcleo convexo, cuyas características geométricas, detalla-

Alvarez Julio 1982

UNE A4 210 x 297

mos en el párrafo 4 del ejercicio previo al modelo M-42.9. En el caso especial descrito en este enunciado, dicho poliedro núcleo es un ARQUIMEDIANO.

Las características geométricas de este Arquimediano, serán pues las siguientes:

a) Los planos secantes "π_1" de la truncadura paralela de aristas, y los "π_2" de la de vértices, dan lugar a la formación de doce decágonos regulares de lado "$l_{10} = a_A$" situados en las caras del icosaedro generador.

b) Igualmente dichos planos "π_1" y "π_2", formarán con sus mutuas intersecciones, veinte exágonos regulares de lado "$l_6 = a_A$", asociados a cada vértice.

c) Los planos secantes "π_1" producen a su vez treinta cuadrados paralelos a cada arista del P_{20}, situados en "π_1" y de lado "$l_4 = a_A$".

Por consiguiente, el poliedro núcleo estará limitado por VEINTE CARAS EXAGONALES REGULARES; DOCE CARAS DECAGONALES REGULARES, y TREINTA CARAS CUADRADAS, todas de igual lado.

Éstas son las características geométricas del ARQUIMEDIANO XII, estudiado y representado en el ejercicio G.E. nº--- Lámina 44, que detallamos a continuación:

UNE A4 210 x 297

Álvarez Julio 1982.

ARQUIMEDIANO XII

1) Número de caras cuadradas: .... $C_4 = 30$
2) Número de caras exagonales: .... $C_6 = 20$
3) Número de caras decagonales: .... $C_{10} = 12$
4) Número de vértices $= \frac{30 \times 4 + 20 \times 6 + 12 \times 10}{3}$. $V = 120$
5) Número de aristas $= \frac{30 \times 4 + 20 \times 6 + 12 \times 10}{2}$ $A = 180$
6) Número de caras en cada vértice $= 1\,C_4 + 1\,C_6 + 1\,C_{10}$

---

2) POSICIÓN DE LOS PLANOS SECANTES "π_1" Y "π_2"

La posición de los planos secantes "π_1", para obtener la "Truncadura paralela de aristas" adecuada, y la de los "π_2" para la "Truncadura de vértices" con respecto al icosaedro generador, se obtiene mediante las distancias "y" y "x" respectivamente, tomadas sobre las aristas, y a partir de sus vértices. Para su determinación se han obtenido en el EJERCICIO PREVIO al modelo M-42.9, fórmulas generales que aplicaremos en este ejercicio.

2.1) Cálculo de la distancia "y" que fija la posición del plano "π_1" en la truncadura paralela de aristas.

Se obtiene, en función de la arista "a_{20}" del icosaedro

generador, de la fórmula general (2) del modelo M-42.9:

$$y = \frac{r_{ci}^{p} - r_{ci}^{2p}}{\operatorname{sen} \beta} \qquad (2)$$

En esta fórmula sustituiremos los valores generales de sus variables por los particulares siguientes, correspondientes al icosaedro generador:

a) n = Número de caras del icosaedro $P_n = 20$ (P_{20})

b) p = Número de lados del polígono de una cara del icosaedro $= 3$

c) $r_{ci}^{p} = r_{ci}^{3}$ = Radio de la circunferencia inscrita al triángulo equilátero de una cara del icosaedro, de lado "$\ell_3 = a_{20}$"

d) $r_{ci}^{2p} = r_{ci}^{6}$ = Radio de la circunferencia inscrita al exágono regular de una cara del Arquimediano XII, de arista "a_{XII}"

e) β = Angulo interior del triángulo equilátero de una cara del icosaedro $= \frac{180° \times (3-2)}{3} = 60°$

De estos valores se deducen:

f) $\boxed{\operatorname{sen} \beta} = \operatorname{sen} 60° = \boxed{\frac{\sqrt{3}}{2}}$ (Ver G.P. 1.006)

g) $\boxed{r_{ci}^{p}} = r_{ci}^{3} = \boxed{\frac{\sqrt{3}}{6} a_{20}}$ (Ver G.P. (3) 1400-42)

UNE A4 210 x 297

h) $\boxed{r_{ci}^{2p}} = r_{ci}^{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}\, a_{XII} = \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{5}-1}{6}\, a_{20} = \boxed{\frac{\sqrt{15}-\sqrt{3}}{12}\, a_{20}}$

(Ver G.P. (1) 1400-42).

El valor de "$a_{XII} = \frac{\sqrt{5}-1}{6}\, a_{20}$" se deduce posteriormente en el párrafo 3.21

Sustituyendo los valores f), g) y (h) en (2), tendremos:

$$\boxed{y} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{6}\, a_{20} - \frac{\sqrt{15}-\sqrt{3}}{12}\, a_{20}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{6} - \frac{\sqrt{15}-\sqrt{3}}{12}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\, a_{20} = \frac{\frac{2\sqrt{3}-\sqrt{15}+\sqrt{3}}{12}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\, a_{20} =$$

$$= \frac{3\sqrt{3}-\sqrt{15}}{12} : \frac{\sqrt{3}}{2}\, a_{20} = \frac{3\sqrt{3}-\sqrt{15}}{6\sqrt{3}}\, a_{20} = \frac{3\sqrt{3}:\sqrt{3} - \sqrt{15}:\sqrt{3}}{6}\, a_{20} =$$

$$= \boxed{\frac{3-\sqrt{5}}{6}\, a_{20}}$$

Este valor de "y" justifica el expresado en el enunciado.

2.2) Cálculo de la distancia "x" que fija la posición del plano "π_2" en la truncadura de vértices.

Se obtiene en función de la arista "a_{20}" del poliedro generador de la fórmula general (3) deducida en el ejercicio previo al modelo M-42.9

$$\boxed{x = \frac{r_{ce}^{p} - r_{ci}^{2p}}{\cos\frac{\beta}{2}}} \qquad (3)$$

En esta fórmula sustituiremos los valores generales de

UNE A4 210 x 297

Tavares Julio 1982

sus variables, por los particulares siguientes, correspondientes al icosaedro regular generador.

a) n = Número de caras del icosaedro P_{20} = 20

b) $a_n = a_{20}$ = Arista del icosaedro

c) p = Número de lados de los polígonos de las caras del icosaedro generador = 3

d) $r_{cc}^{p} = r_{cc}^{3}$ = Radio de la circunferencia circunscrita al triángulo equilátero de una cara del icosaedro, de lado " $l_3 = a_{20}$ "

e) $r_{ci}^{2p} = r_{ci}^{6}$ = Radio de la circunferencia inscrita al exágono regular de una cara C_{XII}^{6} del Arquimediano $\overline{XII}$, de arista " a_{XII} "

f) β = Ángulo interior del triángulo equilátero de una cara del icosaedro $= \dfrac{180 \times (3-2)}{3} = 60^\circ$

De estos valores se deduce:

g) $\boxed{\cos \dfrac{\beta}{2}} = \cos \dfrac{60^\circ}{2} = \cos 30^\circ = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ (Ver G.P. 1006)

h) $\boxed{r_{cc}^{p}} = r_{cc}^{3} = \boxed{\dfrac{\sqrt{3}}{3} a_{20}}$ (Ver G.P. (2) 1400-42)

i) $\boxed{r_{ci}^{2p}} = r_{ci}^{6} = \boxed{\dfrac{\sqrt{15} - \sqrt{3}}{12} a_{20}}$ (Ver cálculo de "y")

Sustituyendo los valores g), h), i) en (3) tendremos:

$$\boxed{x} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{3}a_{20} - \frac{\sqrt{15}-\sqrt{3}}{12}a_{20}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{\sqrt{15}-\sqrt{3}}{12}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}a_{20} = \frac{\frac{4\sqrt{3}}{12} - \frac{\sqrt{15}-\sqrt{3}}{12}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}a_{20} =$$

$$= \frac{\frac{4\sqrt{3}-\sqrt{15}+\sqrt{3}}{12}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}a_{20} = \frac{\frac{5\sqrt{3}-\sqrt{15}}{12}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}a_{20} = \frac{5\sqrt{3}-\sqrt{15}}{6\sqrt{3}}a_{20} = \frac{15-\sqrt{45}}{18}a_{20} =$$

$$= \frac{15-3\sqrt{5}}{18}a_{20} = \boxed{\frac{5-\sqrt{5}}{6}a_{20}}$$

Este valor de "x" justifica el expresado en el enunciado

---

3) CONSTRUCCIÓN DE ESTE MODELO

Para la construcción de este modelo, son necesarias las siguientes piezas:

3.1) ICOSAEDRO REGULAR CONVEXO GENERADOR, DE CARAS VACIADAS.

El valor de "a_{20}" se obtiene de la fórmula "$r_{ec}^{20} = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}a_{20}$" deducida en el ejercicio G.E. nº... Lámina 5.- Despejando en ella "a_{20}", tendremos:

$$\boxed{a_{20}} = r_{ec}^{20} : \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4} = \frac{4}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}r_{ec}^{20} = \frac{4\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{10+2\sqrt{5}}r_{ec}^{20} =$$

$$= \frac{2\sqrt{2(5+\sqrt{5})}}{5+\sqrt{5}}r_{ec}^{20} = \frac{2\sqrt{2(5+\sqrt{5})(5-\sqrt{5})^2}}{20}r_{ec}^{20} = \frac{2\sqrt{2\times(5+\sqrt{5})(5-\sqrt{5})(5-\sqrt{5})}}{20}r_{ec}^{20} =$$

$$= 2\sqrt{\frac{2\times 20(5-\sqrt{5})}{20\times 20}}r_{ec}^{20} = \boxed{2\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}\,r_{ec}^{20}}$$

UNE A4 210 x 297

Alvarez Julio 1982

		Modelo M-44.6

Su valor numérico será pues:

$$\boxed{a_{20}} = 2\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}\; r_{20} = 1,0514622\,4\ldots \times 110 \cong \boxed{115,66 \text{ mm}}$$

PIEZA Nº 1 CARAS SUPERFICIALES TRIANGULARES REDUCIDAS

20 unidades

Su forma y dimensiones son iguales a las de la figura 1 del ejercicio M-5.102

PIEZA Nº 2 UNIONES ARISTAS 30 unidades

Su forma y dimensiones son iguales a las de la figura 2 del ejercicio M-5.102

3.2) ARQUIMEDIANO XII (NÚCLEO DEL ICOSAEDRO GENERADOR), DE CARAS MACIZAS, INCLUIDO LAS PIRÁMIDES AUXILIARES DE FIJACIÓN DE LOS VÉRTICES DEL ICOSAEDRO GENERADOR, A LAS CARAS DECAGONALES DEL ARQUIMEDIANO XII

3.21) Cálculo de la longitud "a_{XII}" de la arista del ARQUIMEDIANO XII obtenido del icosaedro regular convexo generador.

Se obtiene, en función de la arista "a_{20}" del icosae-

UNE A4 210 x 297

Alvarez Julio 1982

		Modelo M-44.6

dro generador, de la fórmula (1) deducida en el ESTUDIO PREVIO al modelo M-42.9

$$a_{XII} = \frac{ctg\,\frac{\alpha}{2}\ sen\,\varphi}{sen\,\varphi\ ctg\,\frac{\alpha}{4} + 1}\ a_n \qquad (1)$$

En esta fórmula; sustituiremos los valores generales de sus variables por los particulares siguientes, correspondientes al icosaedro regular convexo generador:

a) n = Número de caras del icosaedro = 20

b) $a_n = a_{20}$ = Arista del icosaedro

c) α = Ángulo central del triángulo equilátero de una cara del icosaedro $= \frac{360°}{3} = 120°$

d) φ = Semiángulo del diedro formado por dos caras consecutivas del icosaedro.

De estos valores se deducen:

e) $sen\,\varphi = \frac{\sqrt{15} + \sqrt{3}}{6}$ (Ver G.P. nº... Lámina 5)

f) $ctg\,\frac{\alpha}{2} = ctg\,\frac{120°}{2} = ctg\,60° = 1 : tg\,60° = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

(Ver G.P. 1006)

g) $ctg\,\frac{\alpha}{4} = ctg\,\frac{120°}{4} = ctg\,30° = 1 : tg\,30° = 1 : \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{3}{\sqrt{3}} =$

$= \frac{3\sqrt{3}}{3} = \sqrt{3}$ (Ver G.P. 1006)

Cabrera Junio 1982

UNE A4 210 x 297

Sustituyendo los valores e), f), g) en (1) tendremos:

$$\boxed{a_{x11}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{3} \times \frac{\sqrt{15}+\sqrt{3}}{6}}{\frac{\sqrt{15}+\sqrt{3}}{6} \times \sqrt{3} + 1} a_{20} = \frac{\frac{\sqrt{45}+3}{18}}{\frac{\sqrt{45}+3}{6} + 1} a_{20} = \frac{\frac{3\sqrt{5}+3}{18}}{\frac{3\sqrt{5}+3}{6} + 1} a_{20} =$$

$$= \frac{\frac{\sqrt{5}+1}{6}}{\frac{\sqrt{5}+1}{2} + 1} a_{20} = \frac{\sqrt{5}+1}{6} : \frac{\sqrt{5}+3}{2} a_{20} = \frac{\sqrt{5}+1}{3\,(3+\sqrt{5})} a_{20} =$$

$$= \frac{(\sqrt{5}+1)(3-\sqrt{5})}{3 \times 4} a_{20} = \frac{3\sqrt{5}+3-5-\sqrt{5}}{12} a_{20} = \frac{2\sqrt{5}-2}{12} a_{20} = \boxed{\frac{\sqrt{5}-1}{6} a_{20}}$$

De donde se obtiene finalmente

$$\boxed{a_{x11} = \frac{\sqrt{5}-1}{6} a_{20}}$$

Para obtener "a_{x11}" en función de "r_{ec}^{20}" (dato de este ejercicio, sustituiremos "$a_{20} = 2\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}\, r_{ec}^{20}$" (valor obtenido en el párrafo 3.1 de este ejercicio. Así pues, tendremos:

$$\boxed{a_{x11}} = \frac{\sqrt{5}-1}{6} a_{20} = \frac{\sqrt{5}-1}{6} \times 2\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}\, r_{ec}^{20} = \frac{\sqrt{5}-1}{3} \times \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}\, r_{ec}^{20} =$$

$$= \frac{1}{3}\sqrt{\frac{(5-\sqrt{5})(\sqrt{5}-1)^2}{10}}\, r_{ec}^{20} = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{(5-\sqrt{5})(5+1-2\sqrt{5})}{10}}\, r_{ec}^{20} =$$

$$= \frac{1}{3}\sqrt{\frac{(5-\sqrt{5})(6-2\sqrt{5})}{10}}\, r_{ec}^{20} = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{(5-\sqrt{5})(3-\sqrt{5})}{5}}\, r_{ec}^{20} =$$

$$= \frac{1}{3}\sqrt{\frac{15-3\sqrt{5}-5\sqrt{5}+5}{5}}\, r_{ec}^{20} = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{20-8\sqrt{5}}{5}}\, r_{ec}^{20} = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{4(5-2\sqrt{5})}{5}}\, r_{ec}^{20} =$$

UNE A4 210 x 297

$$= \frac{2}{3}\sqrt{\frac{5-2\sqrt{5}}{5}}\; r_{ec}^{20}$$

De donde se deduce finalmente:

$$a_{x11} = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{5-2\sqrt{5}}{5}}\; r_{ec}^{20}$$

El valor numérico de "a_{x11}", será pues:

$$a_{x11} = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{5-2\sqrt{5}}{5}}\; r_{ec}^{20} \simeq 0,21\,66\,13\,13\,1\ldots \times 110 \simeq 23,83 \text{ m m}$$

PIEZA N° 3 CARAS SUPERFICIALES CUADRADAS

30 unidades

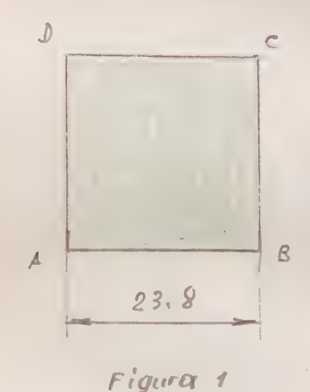


Figura 1

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 1

PIEZA N° 3 30 (u)

Figura 1

PIEZA N° 4 CARAS SUPERFICIALES EXAGONALES REGULARES

20 unidades

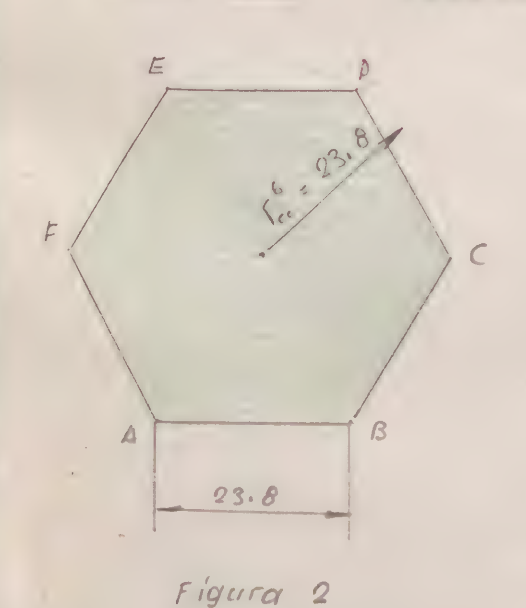


Figura 2

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 2

PIEZA N° 4

20 (u)

Figura 2

UNE A4 210 x 297

C. Alvarez Julio 1982

PIEZA Nº 5 CARAS SUPERFICIALES DECAGONALES REGULARES 12 unidades.

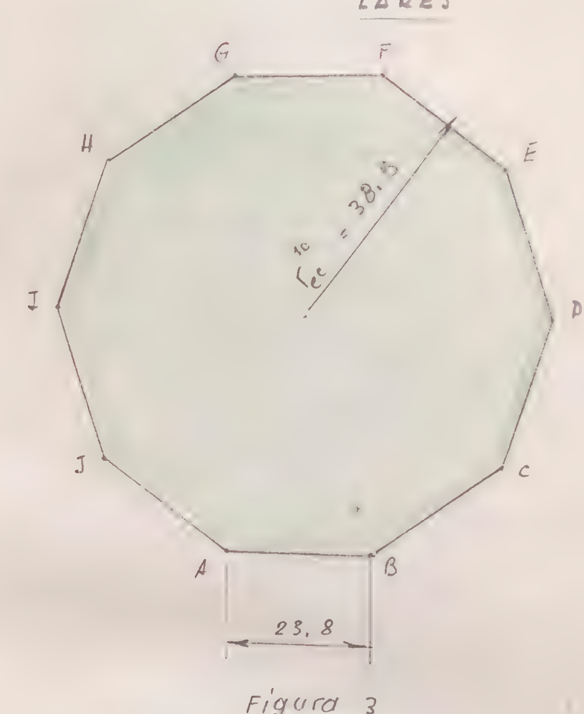


Figura 3

La forma y dimensiones se detallan en la figura 3

$$r_{cc}^{10} = \frac{\sqrt{5}+1}{2} \times 23.8 = 38.6 \text{ mm}$$

PIEZA Nº 5 12 (u)

Figura 3

PIEZA Nº 6 REFUERZO NORMAL EN CARAS CUADRADAS 30 unidades

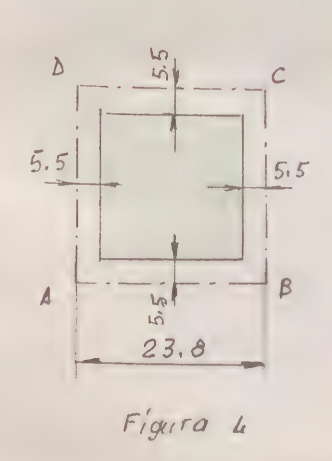


Figura 4

La forma y dimensiones se deducen de las del cuadrado ABCD de la figura 1, y se detallan en la figura 4

PIEZA Nº 6 30 (u)

Figura 4

PIEZA Nº 7 REFUERZO NORMAL EN CARAS EXAGONALES REGULARES 20 unidades

La forma y dimensiones se deducen de las del exágono regular ABCDEF de la figura 2, y se detallan en la figura 5

Modelo M-44.6

Figura 5

PIEZA Nº 7

20 (u)

Figura 5

PIEZA Nº 8 REFUERZO NORMAL EN CARAS DECAGONALES REGULARES

12 unidades

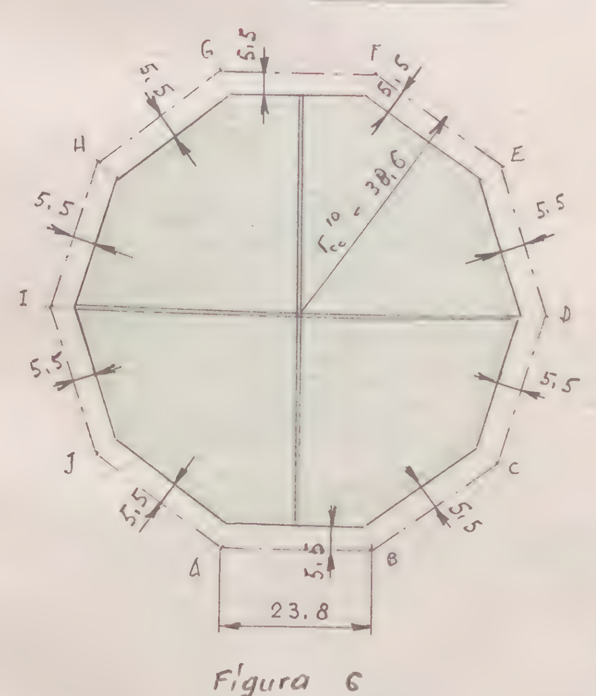


Figura 6

La forma y dimensiones se deducen de las del decágono ABCDEFGHIJ de la figura 3, y se detallan en la figura 6

PIEZA Nº 8

12 (u)

Figura 6

PIEZA Nº 9 REFUERZO TRANSVERSAL EN CARAS EXAGONALES

40 unidades

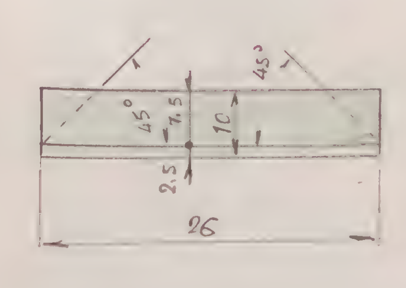


Figura 7

La forma y dimensiones se detallan en la figura 7; su colocación en la figura 7

PIEZA Nº 9 40 (u)

Figura 7

UNE A4-210 x 297

Alvarez Julio 1982

Modelo M-44.6

PIEZA Nº 10 REFUERZO TRANSVERSAL EN CARAS DECAGONALES REGULARES 48 unidades

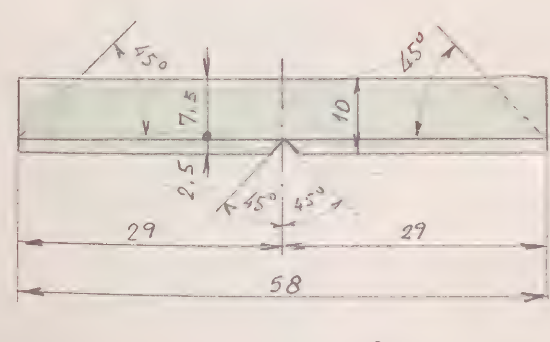


Figura 8

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 7; su colocación en la figura 6.

PIEZA Nº 10 48 (u)

Figura 8

PIEZA Nº 11 UNIONES ARISTAS 180 unidades

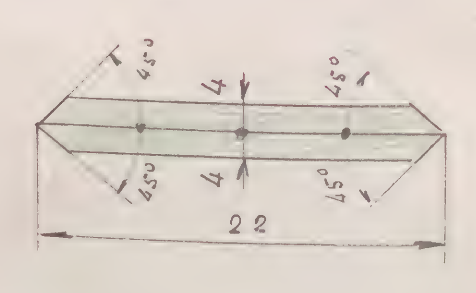


Figura 9

La forma y dimensiones se detallan en la figura 9.

PIEZA Nº 11 180 (u)

Figura 9

PIEZA Nº 12 FORRO COLOREADO EN CARAS CUADRADAS 30 unidades

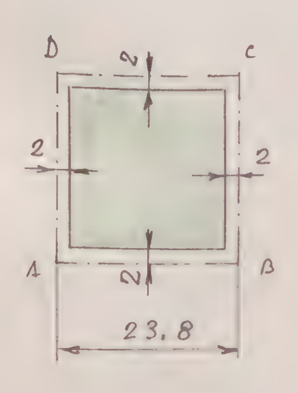


Figura 10

La forma y dimensiones se deducen de las del cuadrado ABCD de la figura 1, y se detallan en la figura 10

PIEZA Nº 12 30 (u)

Figura 10

Calvarez Julio 1982

PIEZA Nº 13 FORRO COLOREADO EN CARAS EXAGONALES REGULARES 20 unidades

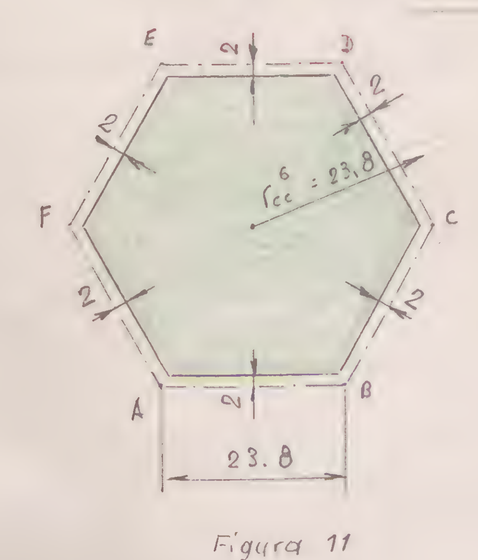


Figura 11

Su forma y dimensiones se deducen de las del exágono regular ABCDEF de la figura 2, y se detallan en la figura 11

PIEZA Nº 13 20 (u)

Figura 11

PIEZA Nº 14 FORRO COLOREADO EN CARAS DECAGONALES REGULARES 20 unidades

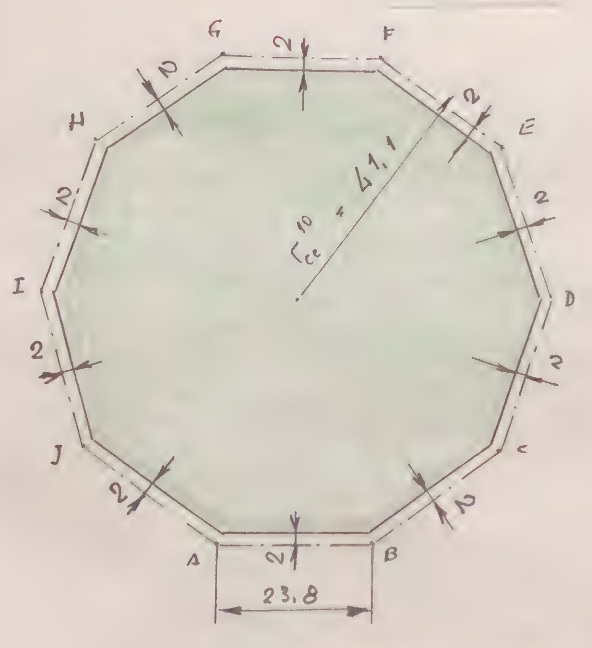


Figura 12

Su forma y dimensiones se deducen de las del decágono regular ABCDEFGHIJ de la figura 3, y se detallan en la figura 12.

PIEZA Nº 14 20 (u)

Figura 12

3.22) Cálculo de la arista lateral "a_ℓ" de las pirámides auxiliares decagonales que fija la posición de los vértices del icosaedro generador con respecto al ARQUIMEDIANO XII.

UNE A4 210 x 297

Alvarez Julio 1982

Modelo M-44.6

Se obtiene, en función de la arista "a_{20}" del icosaedro generador, de la fórmula general (4) deducida en el Ejercicio previo al modelo M-42.9

$$a_{\ell} = \sqrt{\left(r_{cc}^{p} - r_{ci}^{2p}\right)^2 + \left(\frac{a_{XII}}{2}\right)^2} \qquad (4)$$

En esta fórmula general, sustituiremos los valores de sus variables por los particulares siguientes, correspondientes al icosaedro generador:

a) n = Número de caras del icosaedro = 20

b) $a_n = a_{20}$ = Arista del icosaedro

c) p = Número de lados de los polígonos de las caras del icosaedro = 3

d) $r_{cc}^{p} = r_{cc}^{3}$ = Radio de la circunferencia circunscrita al triángulo equilátero de una cara del icosaedro, de lado "$\ell_3 = a_{20}$"

e) $r_{ci}^{2p} = r_{ci}^{6}$ = Radio de la circunferencia inscrita al exágono regular de una cara del Arquimediano XII, de arista "a_{XII}"

f) $a_{\ell} = a_{XII}$ = Arista del Arquimediano XII.

De estos valores se deducen:

(sigue)

Alvarez Julio 1982

UNE A4 210 x 297

g) $a_{x11} = \frac{\sqrt{5} - 1}{6} a_{20}$ (Ver cálculo de a_{x11} en parrafo 3.21)

h) $r_{ce}^{+} = r_{ce}^{3} = \frac{\sqrt{3}}{3} a_{20}$ (Ver cálculo de "x", párrafo 2.2)

i) $r_{ci}^{20} = r_{ci}^{6} = \frac{\sqrt{15} - \sqrt{3}}{12} a_{20}$ (Ver cálculo de "y", párrafo 2.1)

Sustituyendo los valores g), h), i) en (4), tendremos:

$$a_e = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2} a_{20} - \frac{\sqrt{15} - \sqrt{3}}{12} a_{20}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{5} - 1}{6} a_{20} : 2\right)^2} =$$

$$= \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{\sqrt{15} - \sqrt{3}}{12}\right)^2 a_{20}^2 + \left(\frac{\sqrt{5} - 1}{6} : 2\right)^2 a_{20}^2} =$$

$$= \sqrt{\left(\frac{4\sqrt{3}}{12} - \frac{\sqrt{15} - \sqrt{3}}{12}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{5} - 1}{12}\right)^2}\; a_{20} = \sqrt{\left(\frac{4\sqrt{3} - \sqrt{15} + \sqrt{3}}{12}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{5} - 1}{12}\right)^2}\; a_{20} =$$

$$= \sqrt{\frac{(5\sqrt{3} - \sqrt{15})^2}{12^2} + \frac{(\sqrt{5} - 1)^2}{12^2}}\; a_{20} = \sqrt{\frac{(5\sqrt{3} - \sqrt{15})^2 + (5 + 1 - 2\sqrt{5})}{12^2}}\; a_{20} =$$

$$= \sqrt{\frac{75 + 15 - 10\sqrt{45} + 6 - 2\sqrt{5}}{12^2}}\; a_{20} = \sqrt{\frac{90 - 10 \times 3\sqrt{5} + 6 - 2\sqrt{5}}{12^2}}\; a_{20} =$$

$$= \sqrt{\frac{96 - 32\sqrt{5}}{12^2}}\; a_{20} = \sqrt{\frac{2^5 \times 3 - 2^5\sqrt{5}}{2^4 \times 3^2}}\; a_{20} = \sqrt{\frac{6 - 2\sqrt{5}}{9}}\; a_{20} =$$

$$= \sqrt{\frac{2(3 - \sqrt{5})}{9}}\; a_{20} = \frac{\sqrt{2} \times \sqrt{3 - \sqrt{5}}}{3} a_{20} =$$; siendo $3^2 - (\sqrt{5})^2 = 4 = 2^2$, tendremos:

$$= \frac{\sqrt{2} \times \left(\sqrt{\frac{5}{2}} - \sqrt{\frac{1}{2}}\right)}{3} a_{20} = \frac{\sqrt{\frac{10}{2}} - \sqrt{\frac{2}{2}}}{3} a_{20} = \frac{\sqrt{5} - 1}{3} a_{20}$$

UNE A4 210 x 297

Alvarez Julio 1982

Modelo M-44.6

Comparando este resultado, con el valor de "a_{x11}" obtenido en el párrafo 3.21) se obtiene la siguiente notable relación:

$$\boxed{a_\ell = 2\, a_{x11}}$$

Para obtener "a_ℓ" en función de "r_{ec}^{20}" (dato de este ejercicio), sustituiremos "$a_{20} = 2\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}$" valor obtenido en el párrafo 3.1 de este ejercicio. Así pues será:

$$\boxed{a_\ell} = \frac{\sqrt{5}-1}{3}\, a_{20} = \frac{\sqrt{5}-1}{3} \times 2\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}\; r_{ec}^{20} =$$

$$= \frac{2}{3}\sqrt{\frac{(5-\sqrt{5})(\sqrt{5}-1)^2}{10}}\; r_{ec}^{20} = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{(5-\sqrt{5})(5+1-2\sqrt{5})}{10}}\; r_{ec}^{20} =$$

$$= \frac{2}{3}\sqrt{\frac{(5-\sqrt{5})(6-2\sqrt{5})}{10}}\; r_{ec}^{20} = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{(5-\sqrt{5})(3-\sqrt{5})}{5}}\; r_{ec}^{20} =$$

$$= \frac{2}{3}\sqrt{\frac{15-3\sqrt{5}-5\sqrt{5}+5}{5}}\; r_{ec}^{20} = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{20-8\sqrt{5}}{5}}\; r_{ec}^{20} =$$

$$= \frac{2}{3}\sqrt{\frac{4(5-2\sqrt{5})}{5}}\; r_{ec}^{20} = \boxed{\frac{4}{3}\sqrt{\frac{5-2\sqrt{5}}{5}}\; r_{ec}^{20}}$$

Su valor numérico será pues:

$$\boxed{a_\ell} = \frac{4}{3}\sqrt{\frac{5-2\sqrt{5}}{5}}\; r_{ec}^{20} \cong 0,43\,32\,26\,26\,2\ldots \times 110 \cong \boxed{47,65 \text{ mm}}$$

PIEZA Nº 14 DESARROLLO LATERAL DE LAS PIRÁMIDES AUXILIARES DECAGONALES 12 unidades

Calvarez Julio 1982

UNE A4 210 x 297

Modelo M-44.6

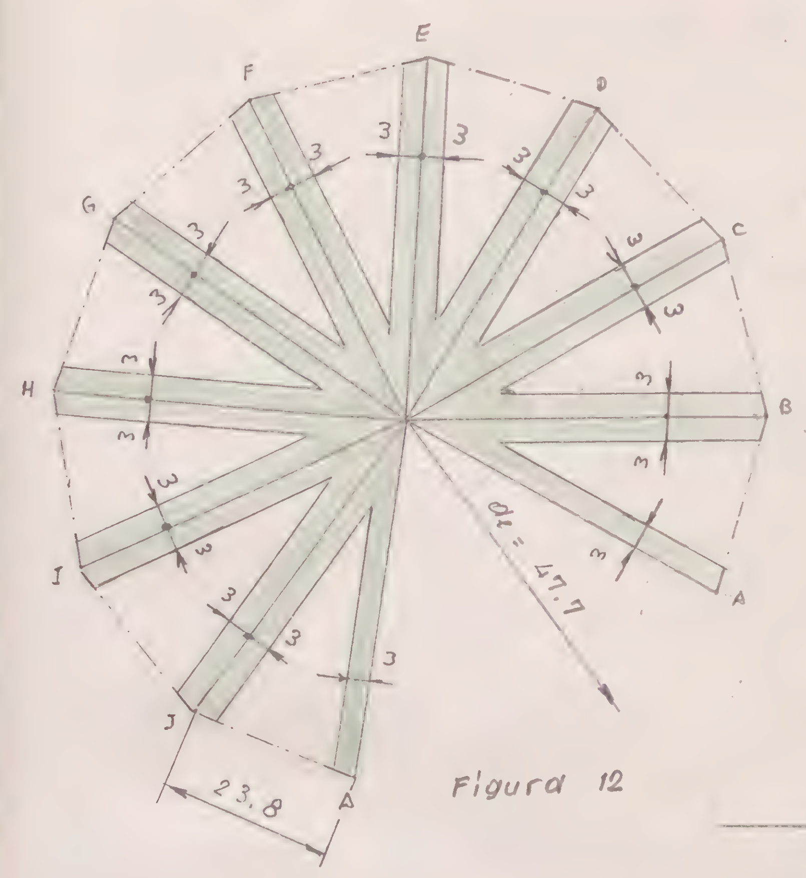


Figura 12

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 12

AB = BC = CD = DE = EF = = FG = GH = HI = IJ = JA = = 23.8 mm

PIEZA Nº 14

12 (u)

Figura 12

PIEZA Nº 15 UNIONES ARISTAS DE LAS PIRÁMIDES AUXILIARES DECAGONALES 120 unidades

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 13

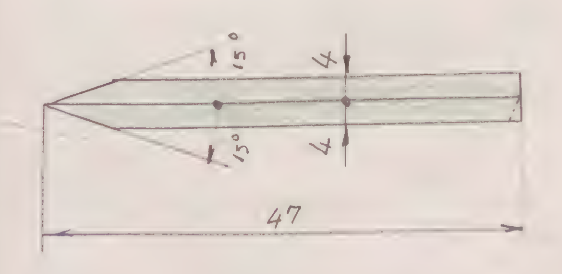


Figura 13

PIEZA Nº 15 120 (u)

Figura 13

4) RESUMEN DE LOS POLIEDROS ARQUIMEDIANOS OBTENIDOS POR EL PROCESO DE "TRUNCADURA DE VÉRTICES" SEGUIDO DE UNA "TRUNCADURA PARALELA DE ARISTAS" (O VICEVERSA), DETALLADOS EN EL PÁRRAFO 4) DEL EJERCICIO M - 42.9.

Los nuevos poliedros Arquimedianos obtenidos por este proceso, que resumimos a continuación, son aquellos en los que los planos secantes π_1 y π_2 de ambas truncaduras, al cortar el plano de cada cara del poliedro generador, forman en ellas polígonos regulares convexos de doble número de lados que los de aquéllas, con lados alternativos paralelos. Los polígonos de las caras del poliedro generador P_n y estos últimos (generados), son concéntricos.

4.1) POLIEDRO NÚCLEO OBTENIDO POR LA TRUNCADURA DE VERTICES DEL "TETRAEDRO REGULAR CONVEXO P_4" DE ARISTA "a_4" A LA DISTANCIA "x", SEGUIDO DE UNA TRUNCADURA PARALELA DE ARISTAS (O VICEVERSA), A LA DISTANCIA "y" ($x = 3y$)

Para "$x = \frac{1}{2} a_4$" e "$y = \frac{1}{6} a_4$", se obtiene el ARQUIMEDIANO X, formado por $6 C_4 + 8 C_6$ (Ver lámina 42). - Modelo M - 42.9

4.2) POLIEDRO NÚCLEO OBTENIDO POR LA TRUNCADURA

Modelo M - 44.6

DE VÉRTICES DEL "EXAEDRO REGULAR CONVEXO P_6", DE ARISTA "a_6", A LA DISTANCIA "x", SEGUIDO DE TRUNCADURA PARALELA DE ARISTAS (O VICEVERSA) A LA DISTANCIA "y" $(x = 3y)$

Para "$x = \frac{12 - 3\sqrt{2}}{14} a_6$" e "$y = \frac{4 - \sqrt{2}}{14} a_6$", se obtiene el ARQUIMEDIANO XI, formado por $12 C_4 + 8 C_6 + 6 C_8$ (Ver Lámina 43).- Modelo M - 43.5

4.3) POLIEDRO NÚCLEO OBTENIDO POR LA TRUNCADURA DE VÉRTICES DEL "OCTAEDRO REGULAR CONVEXO "P_8", DE ARISTA "a_8", A LA DISTANCIA "x", SEGUIDO DE TRUNCADURA PARALELA DE ARISTAS (O VICEVERSA) A LA DISTANCIA "y"

Para "$x = \frac{\sqrt{2}}{3} a_8$" e "$y = \frac{\sqrt{2} - 1}{3} a_8$", se obtiene el ARQUIMEDIANO XI, formado por $12 C_4 + 8 C_6 + 6 C_8$ (Ver Lámina 43).- Modelo M - 43.6

4.4) POLIEDRO NÚCLEO OBTENIDO POR LA TRUNCADURA DE VÉRTICES DEL "DODECAEDRO REGULAR CONVEXO P_{12}" DE ARISTA "a_{12}" A LA DISTANCIA "x", SEGUIDO DE TRUNCADURA PARALELA DE ARISTAS (O VICEVERSA) A LA DISTANCIA "y". $(x = 3y)$

UNE A4 210 x 297

[signature] Septiembre 1983

Para "$x = \frac{3}{5} a_{12}$" e "$y = \frac{1}{5} a_{12}$", se obtiene el ARQUIMEDIANO XII, formado por $30 C_4 + 20 C_6 + 12 C_{10}$ (Ver Lámina 44).- Modelo M - 44.5

4.5) POLIEDRO NÚCLEO OBTENIDO POR LA TRUNCADURA DE VÉRTICES DEL "ICOSAEDRO REGULAR CONVEXO P_{20}", DE ARISTA "a_{20}" A LA DISTANCIA "x", SEGUIDO DE TRUNCADURA PARALELA DE ARISTAS (O VICEVERSA), A LA DISTANCIA "y"

Para "$x = \frac{5-\sqrt{5}}{6} a_{20}$" e "$y = \frac{3-\sqrt{5}}{6} a_{20}$", se obtiene el ARQUIMEDIANO XII, formado por $30 C_4 + 20 C_6 + 12 C_{10}$ (Ver Lámina 44).- Modelo M - 44.6

UNE A4 210 x 297

MODELO M-44.6 PATRONES

30 (u)

12 (u)

12 (u)

Amarillo

12 (u)

30 (u)
verde

30 (u)

MODELO CORPÓREO DEL POLIEDRO CONVEXO DE CARAS MACIZAS "ARQUIMEDIANO XIII", FORMADO POR DOCE CARAS PENTAGONALES REGULARES (C_5) Y VEINTE CARAS EXAGONALES REGULARES (C_6), CONCURRIENDO EN CADA VÉRTICE $1C_5 + 2C_6$.

Radio de la esfera circunscrita:

$$r_{ec}^{XIII} = 110 \text{ mm.}$$

	Ejercicios de construcción de poliedros MODELOS CORPÓREOS	Modelo M-45.1

ENUNCIADO: Construir el modelo corpóreo del poliedro convexo de caras macizas "ARQUIMEDIANO XIII", formado por doce caras pentagonales regulares (C_5) y veinte caras exagonales (C_6), concurriendo en cada vértice $1\ C_5 + 2\ C_6$.

Este poliedro ha sido estudiado analíticamente en el ejercicio G.E. nº... Lámina 45, y representado en sus vistas, principal, superior y lateral izquierda en la mencionada lámina 45, a escala 1:1, con el radio r_{ec}^{XIII} de su esfera circunscrita, de $r_{ec}^{XIII} = 55$ mm.

DATO ÚNICO DE ESTE EJERCICIO: Radio de la esfera circunscrita:

$$r_{ec}^{XIII} = 110 \text{ mm}$$

Las características geométricas del ARQUIMEDIANO XIII, son las siguientes:

Número de caras pentagonales	$C_5 = 12$
Número de caras exagonales	$C_6 = 20$
Número de vértices $= \frac{12 \times 5 + 20 \times 6}{3}$	$V = 60$
Número de aristas $= \frac{12 \times 5 + 20 \times 6}{2}$	$A = 90$
Número de caras en un ángulo sólido	$1\ C_5 + 2\ C_6$

Para poder obtener el despiece de este poliedro, calculemos

UNE A4 210 x 297

Calvache Febrero 1981

previamente la longitud "a_{XIII} de la arista del mismo, en función del radio r_{ec}^{XIII} de su esfera circunscrita. Para ello utilizaremos la fórmula "$r_{ec}^{XIII} = \sqrt{\frac{29+9\sqrt{5}}{8}}\, a_{XIII}$", deducida en el mencionado ejercicio G.E. nº.... -Lámina 45, que nos da el valor de la esfera circunscrita, en función de la arista "a_{XIII}" del Arquimediano XIII.- Despejando en ella a_{XIII}, tendremos:

$$\boxed{a_{XIII}} = r_{ec}^{XIII} : \sqrt{\frac{29+9\sqrt{5}}{8}} = \left(i : \sqrt{\frac{29+9\sqrt{5}}{8}} \right) r_{ec}^{XIII} = \sqrt{\frac{8}{29+9\sqrt{5}}}\, r_{ec}^{XIII} =$$

$$= \sqrt{\frac{8\times(29-9\sqrt{5})}{29^2-9^2\times 5}}\, r_{ec}^{XIII} = \sqrt{\frac{8\times(29-9\sqrt{5})}{841-405}}\, r_{ec}^{XIII} = \sqrt{\frac{8\times(29-9\sqrt{5})}{436}}\, r_{ec}^{XIII} =$$

$$= \sqrt{\frac{2\times(29-9\sqrt{5})}{109}}\, r_{ec}^{XIII} = \boxed{\sqrt{\frac{58-18\sqrt{5}}{109}}\, r_{ec}^{XIII}}$$

Para el caso estudiado (r_{ec}^{XIII} = 110 mm), tendremos:

$$\boxed{a_{XIII}} = \sqrt{\frac{58-18\sqrt{5}}{109}}\, r_{ec}^{XIII} \simeq 0.4035\ 48\ 21\ 2\ldots \times 110 \simeq \boxed{44.4\ \text{mm}}$$

Esta sola magnitud nos permite la construcción del poliedro estudiado, para el cual son necesarias las siguientes piezas:

PIEZA Nº 1. CARAS LATERALES PENTAGONALES REGULARES

12 unidades

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 1

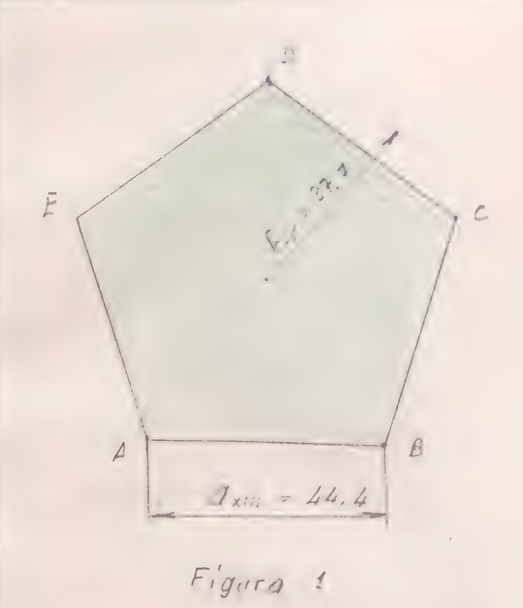


Figura 1

Para conseguir una mayor exactitud de este pentágono regular convexo, calcularemos previamente el valor del radio r_{c-5} de su circunferencia circunscrita, el cual es el siguiente (ver fórmula (3) del ejerc. G.P. 1.400-44)

$$r_{c-5} = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}\, l_5 = 0{,}85065\ldots \times 44.4 \cong 37.7 \text{ mm}$$

PIEZA Nº 1 12 (u)

Figura 1

PIEZA Nº 2 CARAS LATERALES EXAGONALES REGULARES

20 unidades

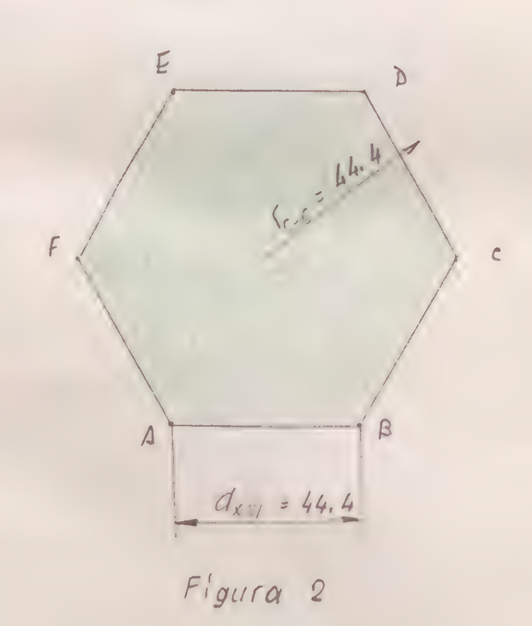


Figura 2

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 2

PIEZA Nº 2

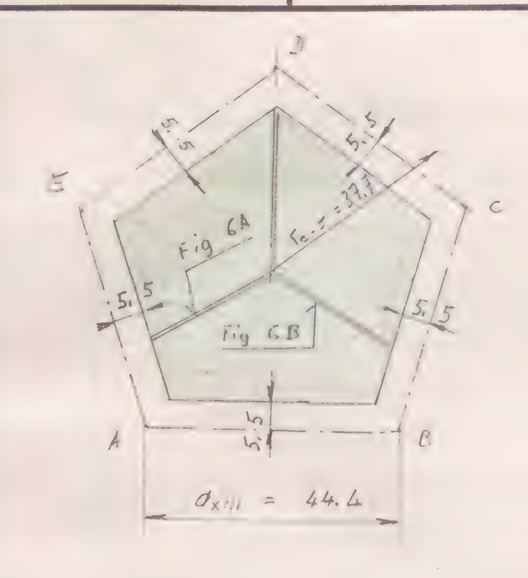
20 (u)

Figura 2

PIEZA Nº 3 REFUERZO NORMAL INTERIOR DE LAS CARAS PENTAGONALES REGULARES 12 unidades

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 3.

Modelo M-45.1



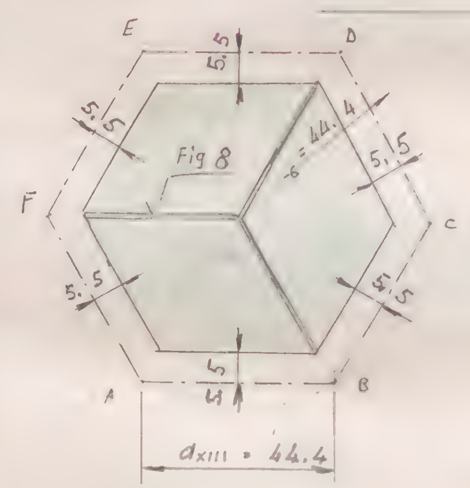
PIEZA Nº 3

12 (u)

Figura 3

Figura 3

PIEZA Nº 4 REFUERZO NORMAL INTERIOR DE LAS CARAS EXAGONALES REGULARES 20 unidades



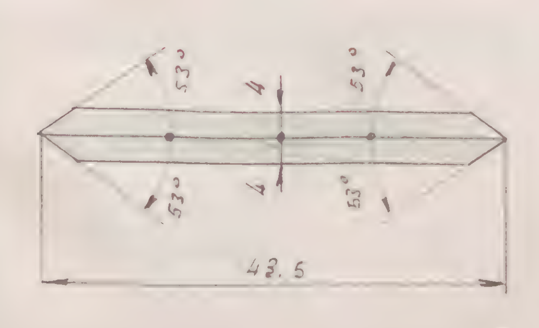
Su forma y dimensiones se detallan en la figura 4

PIEZA Nº 4 20 (u)

Figura 4

Figura 4

PIEZA Nº 5 UNIONES ARISTAS 90 unidades



Su forma y dimensiones se detallan en la figura 5

PIEZA Nº 5

90 (u)

Figura 5

Figura 5

Alvarez Febrero 1981

UNE A4 210 x 297

Modelo M-45.1

PIEZA Nº 6A REFUERZO TRASVERSAL INTERIOR DE LAS CARAS PENTAGONALES 24 unidades (simétricas dos a dos)

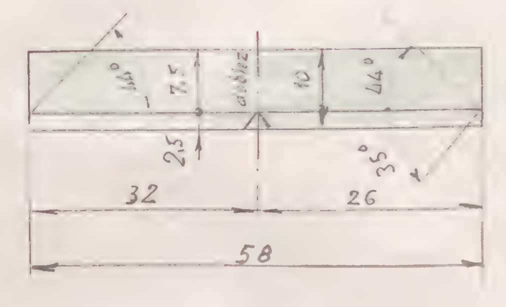


Figura 6A

La forma y dimensiones se detallan en la figura 6A; su colocación, en la figura 3.

PIEZA Nº 6A 24 (u) (simétricas dos a dos)

Figura 6A

PIEZA Nº 6B REFUERZO TRANSVERSAL INTERIOR DE LAS CARAS PENTAGONALES 12 unidades (simétricos dos a dos)

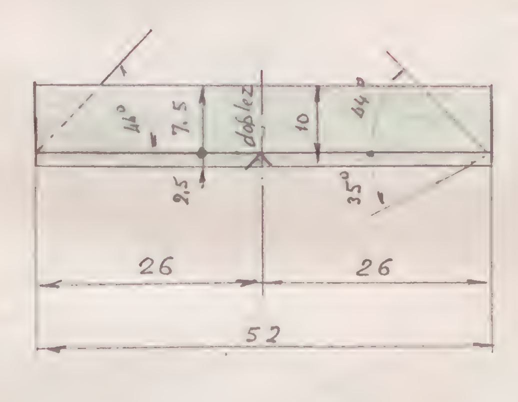


Figura 6B

La forma y dimensiones se detallan en la figura 6B; su colocación en la figura 3.

PIEZA Nº 6B 12 (u) (simétricas dos a dos)

Figura 6B

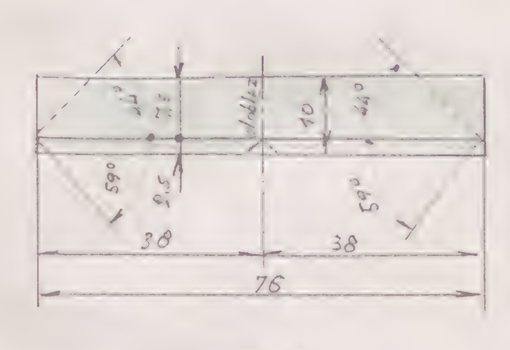
PIEZA Nº 7 REFUERZO TRANSVERSAL INTERIOR DE LAS CARAS EXAGONALES REGULARES 60 unidades

La forma y dimensiones se detallan en la figura 7; su colocación en la figura 4.

UNE A4 210 x 297

Febrero 1981

Modelo M-45.1



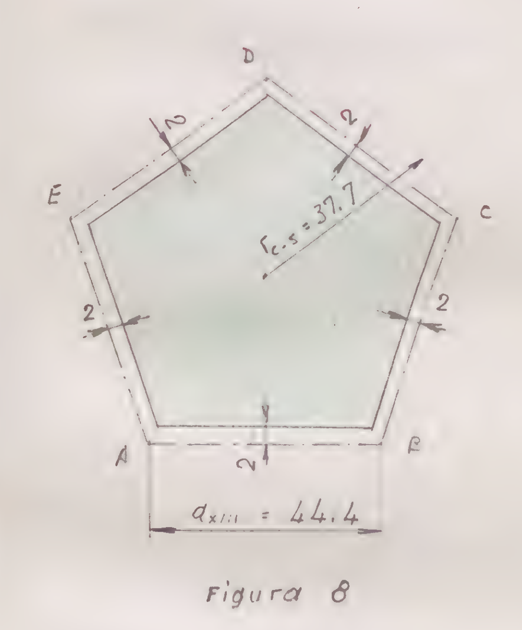
PIEZA Nº 7 60 (u)

Figura 7

Figura 7

PIEZA Nº 8 FORRO COLOREADO EN CARAS PENTAGONALES

12 unidades



Su forma y dimensiones, se deducen de las del pentágono regular convexo ABCDE de la figura 1, y se detallan en la figura 8.

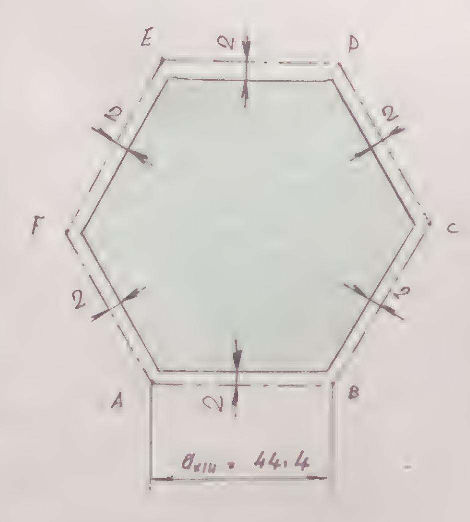
PIEZA Nº 8 12 (u)

Figura 8

Figura 8

PIEZA Nº 9 FORRO COLOREADO EN CARAS EXAGONALES

20 unidades



Su forma y dimensiones, se deducen de las del exágono regular convexo ABCDEF de la figura 2, y se detallan en la figura 9

PIEZA Nº 9 12 (u)

Figura 9

Figura 9

UNE A4 210 x 297

Alvarez Enero 1981

EN PROYECTO

MODELO CORPÓREO DEL POLIEDRO CONVEXO DE CARAS VACIADAS "ARQUIMEDIANO XIII", FORMADO POR DOCE CARAS PENTAGONALES REGULARES (C_5) Y VEINTE CARAS EXAGONALES REGULARES (C_6), CONCURRIENDO EN CADA VÉRTICE $1\ C_5 + 2\ C_6$.

Radio de la esfera circunscrita:

$$r_{ec}^{XIII} = 110 \text{ mm.}$$

UNE A4 210 x 297

	Ejercicios de construcción de poliedros MODELOS CORPÓREOS	Modelo M-45.2

ENUNCIADO: Construir el modelo corpóreo del poliedro convexo de caras vaciadas "ARQUIMEDIANO XIII", formado por doce caras pentagonales regulares (C_5), y veinte caras exagonales regulares (C_6), concurriendo en cada vértice $1\ C_5 + 2\ C_6$.

Este modelo puede considerarse como una variante del M-45.1, de igual forma y dimensiones, pero con sus caras vaciadas.

Las propiedades de este poliedro, así como sus dimensiones, son las enunciadas y calculadas en el mencionado modelo M-45.1

DATO ÚNICO DE ESTE EJERCICIO: r_{ec}^{XIII} = radio de la esfera circunscrita:

$$r_{ec}^{XIII} = 110 \text{ mm}$$

Para la construcción de este poliedro, son necesarias las siguientes piezas:

PIEZA Nº 1 — CARAS LATERALES PENTAGONALES REGULARES — 12 unidades

Su forma y dimensiones se detallan en la figura nº 1.

UNE A4 210 x 297

Modelo M-45.2

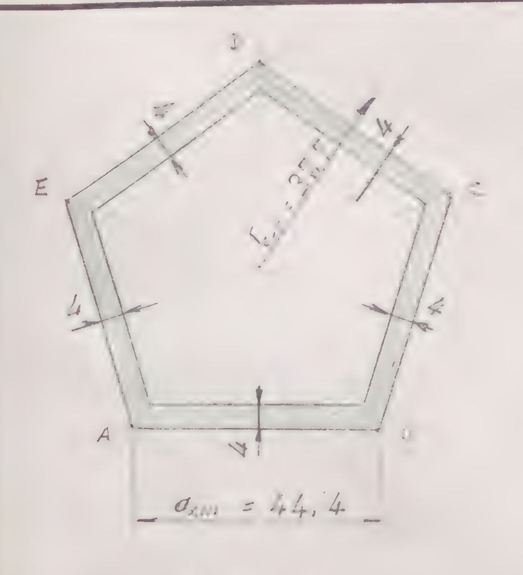


Figura 1

PIEZA Nº 1

12 (u)

Figura 1

PIEZA Nº 2 CARAS LATERALES EXAGONALES REGULARES

20 unidades

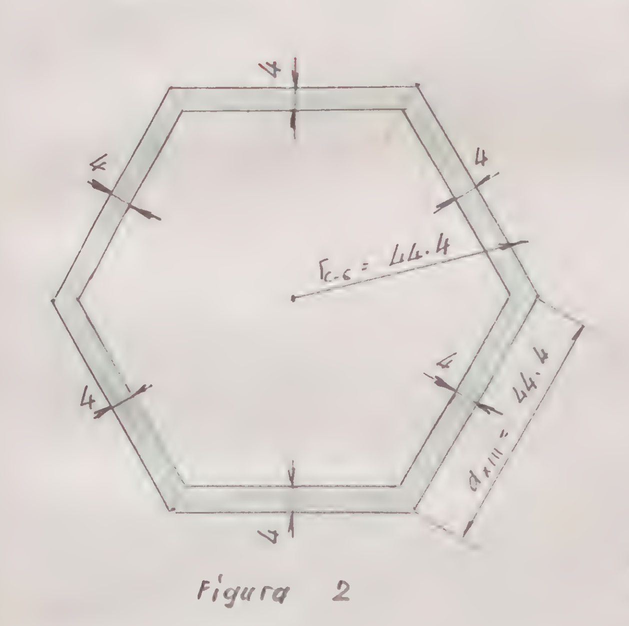


Figura 2

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 2

PIEZA Nº 2 20 (u)

Figura 2

PIEZA Nº 3 UNIONES ARISTAS 90 unidades

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 3

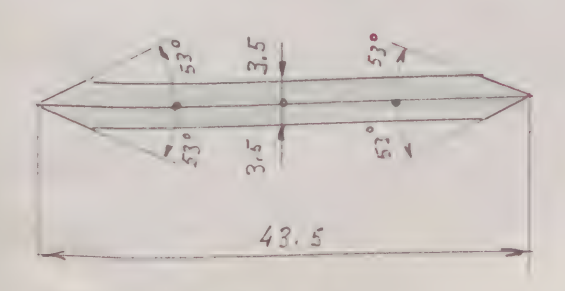


Figura 3

PIEZA Nº 3 90 (u)

Figura 3

UNE A4 210 x 297

Alvarez Febrero 1981

VARIANTE DEL MODELO M- 45.1, DE IGUAL FORMA QUE ÉSTE, SIENDO MÁS PEQUEÑO EL RADIO DE SU ESFERA CIRCUNSCRITA.

Radio de la esfera circunscrita:

$$r_{ec}^{XIII} = 76,1 \text{ mm.}$$

	Ejercicios de construcción de poliedros MODELOS CORPÓREOS	Modelo M-45.3

ENUNCIADO: Construir el modelo corpóreo del poliedro convexo de caras macizas "ARQUIMEDIANO XIII", formado por doce caras pentagonales regulares (C_5), y veinte caras exagonales regulares (C_6), concurriendo en cada vértice $1\,C_5 + 2\,C_6$.

Este modelo puede considerarse como una variante del modelo M-45.1, de igual forma que éste, siendo menor el radio de su esfera circunscrita ($r_{ec}^{XIII} = 76.1$ mm < 110)

Para obtener el despiece de este modelo, utilizaremos el mismo estudio analítico, hecho en el modelo M-45.1, determinando previamente el coeficiente "k" de reducción, $k = 76.1 : 110$, o relación de los radios correspondientes de sus respectivas esferas circunscritas.

DATO ÚNICO DE ESTE EJERCICIO

$$r_{ec}^{XIII} = 76.1 \text{ mm}$$

COEFICIENTE DE REDUCCIÓN

$$k = \frac{76.1}{110} = 0{,}69\widehat{18}\ldots$$

UNE A4 210 x 297

A continuación presentamos diversas tablas de longitudes y ángulos, cuyas dimensiones han sido consignadas en las diferentes figuras del modelo M-45.1, y de los valores correspondientes a aplicar en la construcción de este nuevo modelo M-45.3, en el que son necesarias las siguientes piezas:

PIEZA Nº 1 CARAS LATERALES PENTAGONALES REGULARES

12 unidades

La figura 1, ha de construirse con las siguientes cotas modificadas:

FIGURA 1	Longitudes mm	Cotas modificadas mm
Pieza nº 1	44.4	30.7
12 (u)	37.7	26.1

PIEZA Nº 2 CARAS LATERALES EXAGONALES REGULARES

20 unidades

La figura 2, ha de construirse con las siguientes cotas modificadas:

FIGURA 2	Longitudes mm	Cotas modificadas mm
PIEZA Nº 2 20 (u)	44. 4	30. 7

Modelo M-45.3

PIEZA Nº 3 REFUERZO NORMAL INTERIOR DE LAS CARAS PENTAGONALES REGULARES 12 unidades

La figura 3. ha de construirse con las siguientes cotas modificadas:

FIGURA 3	Longitudes mm	Cotas modificadas mm
Pieza nº 3 12 (u)	44.4 37.7 5.5	30.7 26.1 4.0

PIEZA Nº 4 REFUERZO NORMAL INTERIOR DE LAS CARAS EXAGONALES REGULARES 20 unidades

La figura 4, ha de construirse con las siguientes cotas modificadas:

FIGURA 4	Longitudes mm	Cotas modificadas mm
Pieza nº 4 20 (u)	44.4 5.5	30.7 4.0

PIEZA Nº 5 UNIONES ARISTAS 90 unidades

La figura nº 5, ha de construirse con las siguientes cotas modificadas:

FIGURA 5	Longitudes mm	Cotas modificadas mm
Pieza nº 5 90 (u)	43.5 4.0 53°	29.5 4.0 53°

PIEZAS Nos 6A y 6B — 36 unidades

Estas dos piezas se sustituyen por las de la siguiente figura nº 10 (Pieza nº 5)

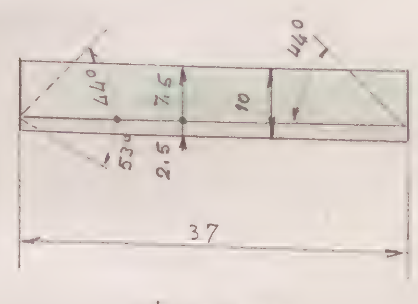


Figura 10

PIEZA Nº 5 — 36 (u)

Figura 10

PIEZA Nº 7

Esta pieza se sustituye por la de la siguiente figura 11

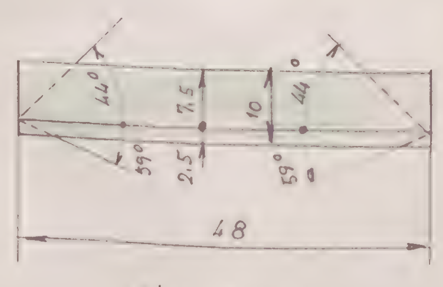


Figura 11

PIEZA Nº 7 — 40 (u)

Figura 11

PIEZA Nº 8 PORRO COLOREADO EN CARAS PENTAGONALES

12 unidades

La figura nº 8, ha de construirse con las siguientes cotas modificadas:

Modelo M - 45.3

FIGURA 8	Longitudes mm	Cotas modificadas mm
Pieza nº 8	44.4	30.7
12 (u)	37.7	26.1
	2.0	2.0

PIEZA Nº 9 FORRO COLOREADO EN CARAS EXAGONALES

20 unidades

La figura nº 9, ha de construirse con las siguientes cotas modificadas:

FIGURA 9	Longitudes mm	Cotas modificadas mm
Pieza nº 9	44.4	30.7
20 (u)	2.0	2.0

UNE A4 210 x 297

VARIANTE DEL MODELO M-45.2, DE IGUAL FORMA QUE ÉSTE, SIENDO MÁS PEQUEÑO EL RADIO DE SU ESFERA CIRCUNSCRITA.

Radio de la esfera circunscrita:

$$r_{ec}^{XIII} = 76.1 \text{ mm}$$

	Ejercicios de construcción de poliedros MODELOS CORPÓREOS	Modelo M - 45.4

ENUNCIADO: Construir el modelo corpóreo del poliedro convexo de caras vaciadas "ARQUIMEDIANO XIII" formado por doce caras pentagonales regulares (C_5), y veinte caras escagonales regulares (C_6), concurriendo en cada vértice $1\ C_5 + 2\ C_6$.

Este modelo puede considerarse como una variante del modelo M - 45.2, de igual forma que éste, pero siendo más pequeño el radio de su esfera circunscrita ($r_{ec}^{XIII} = 76.1$ mm < 110)

Para obtener el despiece de este modelo, utilizaremos el mismo estudio analítico desarrollado en el modelo M - 45.2, determinando previamente el coeficiente "k" de reducción ($k = 76.1 : 110$), o relación entre los radios correspondientes de sus respectivas esferas circunscritas.

DATO ÚNICO DE ESTE EJERCICIO:

$$r_{ec}^{XIII} = 76,1 \text{ mm}$$

COEFICIENTE DE REDUCCIÓN:

$$k = \frac{76.1}{110} = 0.69\widehat{18}\ldots$$

UNE A4 210 x 297

Tallavara Febrero 1981

Modelo M-45.4

A continuación presentamos diversas tablas de longitudes y ángulos, cuyas dimensiones han sido reseñadas en las distintas figuras del modelo M-45.2, y de los valores correspondientes a aplicar en la construcción de este nuevo modelo M-45.4, en el que son necesarias las siguientes piezas:

PIEZA Nº 1 CARAS LATERALES PENTAGONALES REGULARES

12 unidades

La figura 1, ha de construirse con las siguientes cotas modificadas:

FIGURA 1	Longitudes mm	Cotas modificadas
Pieza nº 1	44.4	30.7
12 (u)	37.7	26.1
	4.0	3.0

—

PIEZA Nº 2 CARAS LATERALES EXAGONALES, REGULARES.

20 (u)

La figura 2, ha de construirse con las siguientes cotas modificadas:

FIGURA 2	Longitudes mm	Cotas modificadas mm
Pieza nº 2	44.4	30.7
20(U)	4.0	3.0

—

UNE A4 210 x 297

[signature] Febrero 1981.

Modelo M - 45.4

PIEZA Nº 3 UNIONES ARISTAS 90 unidades

La figura 3, ha de construirse con las siguientes cotas modificadas:

FIGURA 3	Longitudes m m	Cotas modificadas m m
Pieza nº 3	43.5	29.5
90 (u)	3.5	2.5
	53º	53º

UNE A4 210 x 297

[signature] Febrero 1981

MODELO CORPÓREO DEL "ARQUIMEDIANO XIII", OBTENIDO POR TRUNCADURA DE VÉRTICES DE UN DODECAEDRO REGULAR CONVEXO, DE ARISTA "a_{12}", AL TOMAR SOBRE CADA ARISTA, Y DESDE SU VÉRTICE, LA DISTANCIA "$x = \frac{27 + 3\sqrt{5}}{38} a_{12}$".- EL ARQUIMEDIANO OBTENIDO, SE CONSTRUIRÁ CON LAS CARAS MACIZAS, Y EL DODECAEDRO REGULAR GENERADOR, CON LAS CARAS VACIADAS EN LOS VÉRTICES TRUNCADOS.

Radio de la esfera circunscrita al dodecaedro generador:

$$r_{ec}^{12} = 110 \text{ mm.}$$

ENUNCIADO: Construir el modelo corpóreo del "ARQUIMEDIANO XIII" obtenido por truncadura de vértices de un dodecaedro regular convexo, de arista "a_{12}", al tomar sobre cada arista la distancia "$x = \frac{27 + 3\sqrt{5}}{38} a_{12}$". -
El Arquimediano obtenido, se construirá con las caras macizas, y el dodecaedro regular generador, con las caras vaciadas en los vértices truncados.

DATO ÚNICO DE ESTE EJERCICIO: r_{ec}^{12} = Radio de la esfera circunscrita al dodecaedro generador.

$$r_{ec}^{12} = 110 \text{ mm}$$

1) CONSIDERACIONES PREVIAS

El proceso geométrico denominado TRUNCADURA DE VÉRTICES de los poliedros regulares convexos, por el cual se obtienen varios de los POLIEDROS SEMIREGULARES CONVEXOS, denominados también POLIEDROS ARQUIMEDIANOS, obteniéndose también por dicho proceso los propios poliedros regulares convexos, fué estudiado sistemáticamente y aplicado al TETRAEDRO REGULAR CONVEXO, en los ejercicios M - 39.1; M - 39.5; M - 39.7 y M - 6.2.

Puede apreciarse en dichos estudios que, las distintas posiciones del plano secante, dan lugar a la obtención de un poliedro núcleo de muy variadas formas, dependien-

$a_{12} = 78.50$ mm B

$$x = \frac{27 + 3\sqrt{5}}{38} a_{12} = [illegible]$$ B

$$\cancel{a_{XIII} = \frac{83 - 33\sqrt{5}}{38} d_{12} = [illegible]}$$ Mal

$$\overline{GN} = \frac{\sqrt{5} + 1}{2} x = 112.66$$ B

Comprobación: $a_{XIII} = \frac{1}{3} \overline{GN} = 37,55$ mm B

$$\underline{a_{XIII}} = \frac{\sqrt{15} + 9\sqrt{3}}{57} \times 110 = \underline{37,56} \text{ mm}$$

$$r_{ei}^{XIII-6} = \frac{8 + 3\sqrt{5}}{19} \times 110 = 85,15$$

$$h_6 = \frac{11 - 3\sqrt{5}}{19} \times 110 = 24,85 \text{ mm}$$

$$r_{c-6} = a_{XIII} = 37,56 = \frac{\sqrt{15} + 9\sqrt{3}}{57} \times 110$$

$$a_6 = \sqrt{(24,85)^2 + 37,56^2} = 45,04 \text{ m}$$

$$h_r = 0,28\,77\ldots \times a_{12} = 0,28\,77\ldots \times 78.50 = 22,59$$

tes de la posición del plano secante con respecto al tetraedro generador. La posición de dicho plano secante se fija por la condición de pasar por puntos situados a la distancia variable "x", sobre las aristas que concurren en cada vértice del mencionado tetraedro generador, a partir de sus respectivos vértices.

Entre las diversas posiciones del plano secante, existen algunas notables, en las que el poliedro núcleo es un POLIEDRO ARQUIMEDIANO, o tambien un POLIEDRO REGULAR CONVEXO.

Dichas posiciones notables, estudiadas en el TETRAEDRO REGULAR CONVEXO, se detallan resumidamente en el ejercicio M-40.5. El proceso de obtención aplicado en dicho tetraedro regular convexo, puede hacerse extensivo a los restantes poliedros regulares convexos (exaedro, octaedro, dodecaedro é icosaedro), obteniéndose tambien en todos éstos un poliedro núcleo que puede ser un POLIEDRO ARQUIMEDIANO, o tambien un POLIEDRO REGULAR CONVEXO.

El modelo que estudiamos en este ejercicio, puede obtenerse partiendo del modelo M-36.5 en el cual el poliedro núcleo obtenido por la TRUNCADURA DE VÉRTICES de un DODECAEDRO REGULAR CONVEXO, a la distancia "$x = \frac{1}{2} a_{12}$", era el "ARQUIMEDIANO IV" de arista "$a_{IV} = \frac{\sqrt{5}+1}{4} a_{12}$".

Si suponemos que en el mencionado modelo M-36.5 variamos la posición del plano secante, a partir de la dis-

UNE A4 210 x 297

Talavera   Enero 1981

tancia "$x = \frac{1}{2} a_{12}$", alejándose del vértice correspondiente, dicho plano recante genera paulatinamente un poliedro unido irregular de las siguientes características geométricas:

a) El plano recante produce en las caras del dodecaedro generador, pentágonos regulares convexos, cuyos lados van disminuyendo de longitud a medida que crece la distancia "x"

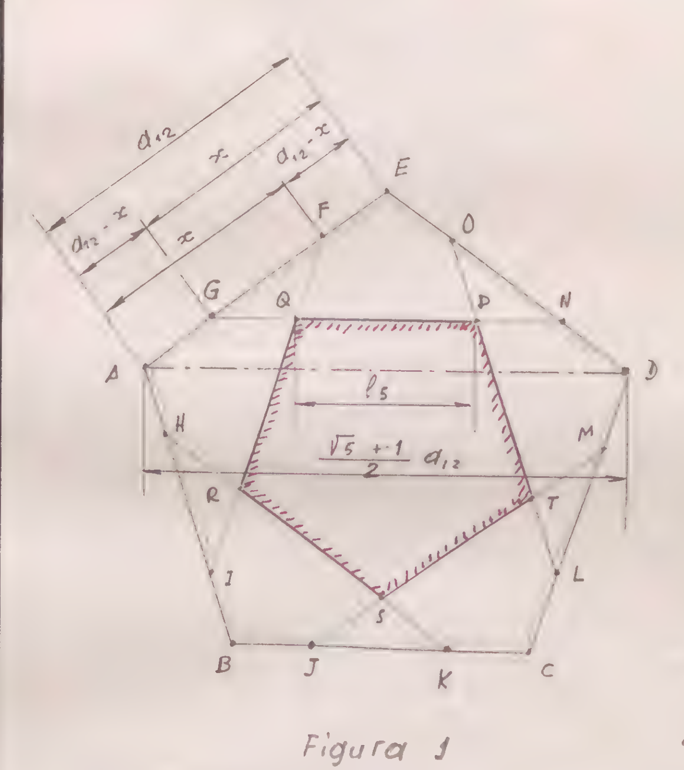


Figura 1

En efecto: Sea ABCDE (figura 1) una cara pentagonal regular del dodecaedro regular convexo generador de arista "a_{12}".- Tomemos, a partir de sus vértices, y en todos sus lados, distancias $x > \frac{1}{2} a_{12}$ lo que nos situará los puntos F, G, H, I, J, K, L, M, N, O.- Uniendo los dos puntos correspondientes a dos lados concurrentes en cada vértice del pentágono regular de la cara ABCDE (G con N; F con I; H con K; J con M; y L con O), la intersección de cada par de estos segmentos, producirá los puntos P, Q, R, S, T, vértices del pentágono regular convexo PQRST, de lado l_5, situado en cada cara del dodecaedro generador.

b) Por otra parte, el mismo plano anterior de dicha truncadura de vértices, produce en los ángulos sólidos

UNE A4 210 x 297

Tavares   Enero 1981

2.2) Las veinte caras exagonales QPXYVW (fig. 2), han de ser regulares y convexas.

La condición 2.1) se cumple siempre, por la construcción realizada en la figura 1, en cualquier posición del plano secante para todo valor de $x > \frac{1}{2} a_{12}$

La condición 2.2) se cumplirá cuando los exágonos QPXYVW, de la figura 2, sean regulares. Estos exágonos son en general equiángulos pues, por construcción, los lados opuestos VY, WQ, PX, son paralelos a los lados opuestos GN, NU, UG del triángulo sección GNU.

Dichos exágonos equiángulos serán equiláteros, y por consiguiente regulares, cuando sus lados sean iguales.

Como a medida que el plano secante se vaya alejando del vértice correspondiente, a partir de la posición en que $x = \frac{1}{2} a_{12}$, los tres lados QP = XY = YW (fig. 2), situados sobre los lados GN, NU, UG irán disminuyendo de longitud y al mismo tiempo, los lados VY = WQ = PX, irán aumentando de longitud. Por consiguiente, existirá una posición del plano secante $x > \frac{1}{2} a_{12}$, en que dichos lados sean iguales, lo cual ocurrirá cuando se verifique la condición de ser (figura 2)

$$l_5 = \frac{1}{3} GN \qquad (1)$$

3) CÁLCULO ANALÍTICO DE LONGITUDES

3.1 LONGITUD $\overline{AD}$ DE LA FIGURA 1

Es la diagonal de un pentágono regular convexo de lado $\overline{AE} = a_{12}$. - Su valor, en función de su lado $(l_5 = a_{12})$

$$\boxed{\overline{AD} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}\, a_{12}} \qquad (2)$$

(ver fórmula (6) del ejercicio (G.P. 1.400.-44)

3.2 LONGITUD $\overline{GN}$ DE LA FIGURA 1

De la semejanza de los triángulos isósceles EGN y EAD, tendremos:

$$\frac{\overline{GN}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{EG}}{\overline{AE}} \quad \text{de donde} \quad \overline{GN} = \frac{\overline{AD} \times \overline{EG}}{\overline{AE}} \quad \text{y siendo}$$

$\overline{AD} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}\, a_{12}$ (ver fórmula (2); $\overline{EG} = x$ (fig. 1) y $\overline{AE} = a_{12}$ (fig. 1), sustituyendo valores, será:

$$\boxed{\overline{GN}} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}\, a_{12} \times \frac{x}{a_{12}} = \boxed{\frac{\sqrt{5}+1}{2}\, x} \qquad (3)$$

3.3 LONGITUD $\overline{FG}$ DE LA FIGURA 1

De la figura 2, se deduce

$$\overline{FG} = \overline{AF} - \overline{AG}, \quad \text{y siendo}$$

$\overline{AF} = x$ (fig. 1) y $\overline{AG} = a_{12} - x$ (fig. 1), sustituyendo valores, será:

$$\boxed{\overline{FG}} = x - (a_{12} - x) = x - a_{12} + x = \boxed{2x - a_{12}} \qquad (4)$$

UNE A4 210 x 297

Calderón Enero 1981

3.4 LONGITUD $\overline{GQ} = \overline{PN}$ DE LA FIGURA 1

De la semejanza de los triángulos isósceles GFQ y ADE, se deduce:

$$\frac{\overline{FG}}{\overline{GQ}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{ED}} \quad \text{de donde} \quad \overline{GQ} = \frac{\overline{FG} \times \overline{ED}}{\overline{AD}}, \quad \text{y siendo:}$$

$\overline{FG} = 2x - d_{12}$ (ver fórmula 4); $\overline{ED} = d_{12}$ (fig. 1) y

$\overline{AD} = \frac{\sqrt{5}+1}{2} d_{12}$ (ver fórmula 2), sustituyendo valores, será:

$$\boxed{\overline{GQ}} = \frac{(2x - a_{12}) \times d_{12}}{\frac{\sqrt{5}+1}{2} d_{12}} = (2x - a_{12}) : \frac{\sqrt{5}+1}{2} = \frac{2 \times (2x - a_{12})}{\sqrt{5}+1} =$$

$$= \frac{2 \times (2x - a_{12})(\sqrt{5}-1)}{5-1} = \boxed{\frac{(2x - d_{12})(\sqrt{5}-1)}{2}} \qquad (5)$$

3.5 LONGITUD $\overline{QP}$ DE LA FIGURA 1

De la figura 1, se deduce:

$$\overline{QP} = \overline{GN} - \left(\overline{GQ} + \overline{PN}\right) = \overline{GN} - 2\,\overline{GQ} \qquad (\overline{GQ} = \overline{PN})$$

y siendo:

$\overline{GN} = \frac{\sqrt{5}+1}{2} x$ (ver fórmula 3.2), y

$\overline{GQ} = \frac{(2x - a_{12})(\sqrt{5}-1)}{2}$ (ver fórmula 5), sustituyendo valores tendríamos:

$$\boxed{\overline{QP}} = \frac{\sqrt{5}+1}{2} x - 2 \times \frac{(2x - a_{12})(\sqrt{5}-1)}{2} = \boxed{\frac{\sqrt{5}+1}{2} x - (2x - a_{12})(\sqrt{5}-1)} \qquad (6)$$

UNE A4 210 x 297

Enero 1981

3.6 LONGITUD "x" EN LA QUE EL POLIEDRO NÚCLEO ES UN POLIEDRO ARQUIMEDIANO

Ello ocurrirá cuando se cumpla la condición de ser

$$\overline{QP} = l_5 = \frac{1}{3}\,\overline{GN} \qquad \text{(ver fórmula 1)}$$

y siendo $\overline{GN} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}\,x$ (ver fórmula 3) será a su vez

$$\overline{QP} = l_5 = \frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{5}+1}{2}\,x = \frac{\sqrt{5}+1}{6}\,x$$ valor que sustituido

en (6) nos dará: la ecuación:

$$\frac{\sqrt{5}+1}{6}\,x = \frac{\sqrt{5}+1}{2}\,x - (2x - a_{12})(\sqrt{5}-1) \qquad (7)$$

en la que al despejar "x" obtendremos su valor en función de "a_{12}". Transformemos la (7) en

$$(2x - a_{12})(\sqrt{5}-1) = \frac{\sqrt{5}+1}{2}\,x - \frac{\sqrt{5}+1}{6}\,x = \left[\frac{\sqrt{5}+1}{2} - \frac{\sqrt{5}+1}{6}\right] x$$

$$2\sqrt{5} - \sqrt{5}\,a_{12} - 2x + a_{12} = \frac{3(\sqrt{5}+1) - (\sqrt{5}+1)}{6}\,x \qquad ''$$

$$(2\sqrt{5} - 2)\,x - (\sqrt{5}-1)\,a_{12} = \frac{2(\sqrt{5}+1)}{6}\,x \qquad ''$$

$$\frac{\sqrt{5}+1}{3}\,x = 2(\sqrt{5}-1)x - (\sqrt{5}-1)\,a_{12} \qquad '' \qquad 2(\sqrt{5}-1)\,x - \frac{\sqrt{5}+1}{3}\,x = (\sqrt{5}-1)\,a_{12}$$

$$\left[2(\sqrt{5}-1) - \frac{\sqrt{5}+1}{3}\right] x = (\sqrt{5}-1)\,a_{12} \qquad ''$$

$$\frac{6(\sqrt{5}-1) - (\sqrt{5}+1)}{3}\,x = (\sqrt{5}-1)\,a_{12} \qquad ''$$

UNE A4 210 x 297

		Modelo M-45.5

$$\frac{6\sqrt{5} - 6 - \sqrt{5} - 1}{3} x = (\sqrt{5} - 1)\, a_{12}$$

$$\frac{5\sqrt{5} - 7}{3} x = (\sqrt{5} - 1)\, a_{12}$$ de donde

$$\boxed{x} = (\sqrt{5} - 1)\, a_{12} : \frac{5\sqrt{5} - 7}{3} = \frac{3(\sqrt{5} - 1)}{5\sqrt{5} - 7} a_{12} = \frac{3(\sqrt{5} - 1)(5\sqrt{5} + 7)}{25 \times 5 - 49} a_{12} =$$

$$= \frac{3 \times (25 - 5\sqrt{5} + 7\sqrt{5} - 7)}{125 - 49} a_{12} = \frac{3 \times (18 + 2\sqrt{5})}{76} a_{12} = \frac{3 \times (9 + \sqrt{5})}{38} a_{12} =$$

$$= \boxed{\frac{27 + 3\sqrt{5}}{38} a_{12}}$$ de donde se obtiene finalmente:

$$\boxed{x = \frac{27 + 3\sqrt{5}}{38} a_{12}} \qquad (8)$$

La expresión (8) nos demuestra que la truncadura de vértices de un dodecaedro regular convexo de arista "a_{12}" a la distancia "$x = \frac{27 + 3\sqrt{5}}{38} a_{12}$", da lugar a la formación de un poliedro semiregular convexo, compuesto de doce caras pentagonales regulares (ver características a) del párrafo 1.) y de veinte caras exagonales regulares (ver características b) del mismo párrafo 1.), o sea que dicho poliedro núcleo es un ARQUIMEDIANO XIII, estudiado en el ejercicio G.E. nº ....- Lámina 45 de las siguientes características geométricas:

(sigue en hoja 10)

Modelo M- 42.5

· Número de caras pentagonales regulares ———— $C_5 = 12$

Número de caras exagonales regulares ———— $C_6 = 20$

Número de vértices $= \frac{12 \times 5 + 20 \times 6}{3}$ ———— $V = 60$

Número de aristas $= \frac{12 \times 5 + 20 \times 6}{2}$ ———— $A = 90$

Número de caras en un ángulo sólido ———— $1\, C_5 + 2\, C_6$

3.7 LONGITUD "a_{XIII}" DE LA ARISTA DEL ARQUIMEDIANO

Se obtiene por transformación previa de (6) y posterior sustitución de "x" por su valor (8) Paso 1°.- Transformación

$$\boxed{a_{XIII}} = \overline{QP} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}x - (2x - a_{12})(\sqrt{5}-1) =$$

$$= \frac{\sqrt{5}+1}{2}x - (2\sqrt{5}x - \sqrt{5}a_{12} - 2x + a_{12}) =$$

$$= \frac{\sqrt{5}+1}{2}x - \left[(2\sqrt{5}-2)x - (\sqrt{5}-1)a_{12}\right] = \frac{\sqrt{5}+1}{2}x - (2\sqrt{5}-2)x + (\sqrt{5}-1)a_{12} =$$

$$= \left[\frac{\sqrt{5}+1}{2} - 2(\sqrt{5}-1)\right]x + (\sqrt{5}-1)a_{12} = \frac{(\sqrt{5}+1) - 4(\sqrt{5}-1)}{2}x + (\sqrt{5}-1)a_{12} =$$

$$= \frac{\sqrt{5}+1-4\sqrt{5}+4}{2}x + (\sqrt{5}-1)a_{12} = \frac{5-3\sqrt{5}}{2}x + (\sqrt{5}-1)a_{12} =$$

Paso 2°.- Sustitución

$$= \frac{5-3\sqrt{5}}{2} \times \frac{27+3\sqrt{5}}{38}a_{12} + (\sqrt{5}-1)a_{12} = \frac{(5-3\sqrt{5})(27+3\sqrt{5})}{76}a_{12} +$$

$$+ (\sqrt{5}-1)a_{12} = \frac{135 - 81\sqrt{5} + 15\sqrt{5} - 45}{76}a_{12} + (\sqrt{5}-1)a_{12} =$$

UNE A4 210 x 297

Calvarez   Enero 1981

$$= \frac{90 - 66\sqrt{5}}{76}\, a_{12} + (\sqrt{5}-1)\, a_{12} = \left[\frac{45 - 33\sqrt{5}}{38} + (\sqrt{5}-1)\right] a_{12} =$$

$$= \frac{(45 - 33\sqrt{5}) + 38 \times (\sqrt{5}-1)}{38}\, a_{12} = \frac{45 - 33\sqrt{5} + 38\sqrt{5} - 38}{38}\, a_{12} = \boxed{\frac{7 + 5\sqrt{5}}{38}\, a_{12}}$$

De donde se obtiene finalmente:

$$\boxed{a_{\overline{XIII}} = \frac{7 + 5\sqrt{5}}{38}\, a_{12}} \qquad (9)$$

fórmula que nos da la magnitud de la arista "$a_{\overline{XIII}}$" del ARQUIMEDIANO $\overline{XIII}$ generado, en función de la arista "a_{12}" del dodecaedro generador.

Como resumen de todo lo expuesto anteriormente, podemos establecer el siguiente enunciado, que justifica el del modelo estudiado.

"<u>El poliedro núcleo obtenido por la TRUNCADURA DE VERTICES de un DODECAEDRO REGULAR CONVEXO, a la distancia</u> $x = \frac{27 + 3\sqrt{5}}{38}\, a_{12}$, <u>es un ARQUIMEDIANO $\overline{XIII}$, de arista igual a</u> $a_{\overline{XIII}} = \frac{7 - 5\sqrt{5}}{38}\, a_{12}$".

4.) CÁLCULO NUMÉRICO DE LONGITUDES, EN FUNCIÓN DE $r_{ec}^{12} = 110$ mm

4.1) ARISTA "a_{12}" DEL DODECAEDRO REGULAR GENERADOR

Se obtiene de la fórmula "$r_{ec}^{12} = \frac{\sqrt{15} + \sqrt{3}}{4}\, a_{12}$", deducida en el ejercicio G.E. n°... - Lámina 4.- Despejando en ella "a_{12}",

tendremos:

$$\boxed{a_{12}} = r_{ec}^{6} : \frac{\sqrt{15}+\sqrt{3}}{4} = \frac{4}{\sqrt{15}+\sqrt{3}} \times r_{ec}^{12} = \frac{4(\sqrt{15}-\sqrt{3})}{15-3} r_{ec}^{12} =$$

$$= \frac{4(\sqrt{15}-\sqrt{3})}{12} r_{ec}^{12} = \boxed{\frac{\sqrt{15}-\sqrt{3}}{3} r_{ec}^{12}} \quad (10)$$

4.2) Arista "a_{XIII}" del Arquimediano XIII, generado

Se deduce de la fórmula (9), sustituyendo en ella el valor de a_{12}, obtenido en (10)

$$\boxed{a_{XIII}} = \frac{7-5\sqrt{5}}{38} a_{12} = \frac{7+5\sqrt{5}}{38} \times \frac{\sqrt{15}-\sqrt{3}}{3} r_{ec}^{12} = \frac{(7+5\sqrt{5})(\sqrt{15}-\sqrt{3})}{114} r_{ec}^{12} =$$

$$= \frac{7\sqrt{15}+5\sqrt{75}-7\sqrt{3}-5\sqrt{15}}{114} r_{ec}^{12} = \frac{2\sqrt{15}+25\sqrt{3}-7\sqrt{3}}{114} r_{ec}^{12} =$$

$$= \frac{2\sqrt{15}+18\sqrt{3}}{114} r_{ec}^{12} = \boxed{\frac{\sqrt{15}+9\sqrt{3}}{57} r_{ec}^{12}} \quad (11)$$

4.3) Distancia "x" en que la truncadura de vértices del dodecaedro regular convexo, produce el ARQUIMEDIANO XIII generado.

Se deduce de la fórmula (8) sustituyendo en ella "a_{12}" por su valor obtenido en (10). Así pues, tendremos:

Modelo M - 45.5

$$\boxed{x} = \frac{27+3\sqrt{5}}{38}\, a_{12} = \frac{27+3\sqrt{5}}{38} \times \frac{\sqrt{15}-\sqrt{3}}{3}\, r_{ec}^{12} = \frac{(27+3\sqrt{5})(\sqrt{15}-\sqrt{3})}{114}\, r_{ec}^{12} =$$

$$= \frac{27\sqrt{15}+3\sqrt{75}-27\sqrt{3}-3\sqrt{15}}{114}\, r_{ec}^{12} = \frac{24\sqrt{15}+15\sqrt{3}-27\sqrt{3}}{114}\, r_{ec}^{12} =$$

$$= \frac{24\sqrt{15}-12\sqrt{3}}{114}\, r_{ec}^{12} = \boxed{\frac{4\sqrt{15}-2\sqrt{3}}{19}\, r_{ec}^{12}} \qquad (12)$$

4.4) Radio "r_{C-6}" de la circunferencia circunscrita al exágono regular de una cara C_6 del Arquimediano generado de arista $a_{XIII} = \frac{7+5\sqrt{5}}{38}\, a_{12}$ (ver fórmula (9))

Se obtiene de la fórmula (9), sustituyendo en ella "a_{12}" por su valor obtenido en (10)

$$\boxed{r_{C-6}} = a_{XIII} = \frac{7+5\sqrt{5}}{38}\, a_{12} = \frac{7+5\sqrt{5}}{38} \times \frac{\sqrt{15}-\sqrt{3}}{3}\, r_{ec}^{12} =$$

$$\frac{(7+5\sqrt{5})(\sqrt{15}-\sqrt{3})}{38 \times 3}\, r_{ec}^{12} = \frac{7\sqrt{15}+5\sqrt{75}-7\sqrt{3}-5\sqrt{15}}{114}\, r_{ec}^{12} =$$

$$\frac{2\sqrt{15}+25\sqrt{3}-7\sqrt{3}}{114}\, r_{ec}^{12} = \frac{2\sqrt{15}+18\sqrt{3}}{114}\, r_{ec}^{12} = \boxed{\frac{\sqrt{15}+9\sqrt{3}}{57}\, r_{ec}^{12}} \qquad (13)$$

4.5) Radio "r_{ei}^{XIII-6}" de la esfera tangente a las caras exagonales del Arquimediano generado.

Dicho radio se obtuvo en el ejercicio G.E. nº ...- Lámina 45, en función de su arista. Su valor es "$r_{ei}^{XIII-6} = \frac{3\sqrt{3}+\sqrt{15}}{4}\, a_{XIII}$"

UNE A4 210 x 297

CAlvarez Enero 1981

Modelo M- 45.5

Sustituyendo en ella a_{XIII} por los valor obtenidos en (9) y (10)

$$\boxed{r_{e.i}^{XIII-6}} = \frac{3\sqrt{3}+\sqrt{15}}{4}\, a_{XIII} = \frac{3\sqrt{3}+\sqrt{15}}{4} \times \frac{7+5\sqrt{5}}{38}\, a_{12} =$$

$$= \frac{3\sqrt{3}+\sqrt{15}}{4} \times \frac{7+5\sqrt{5}}{38} \times \frac{\sqrt{15}-\sqrt{3}}{3}\, r_{ec}^{12} = \frac{(\sqrt{15}+3\sqrt{3})(\sqrt{15}-\sqrt{3})(7+5\sqrt{5})}{12 \times 38}\, r_{ec}^{12}$$

$$= \frac{(15+3\sqrt{45}-\sqrt{45}-9)(7+5\sqrt{5})}{12 \times 38}\, r_{ec}^{12} = \frac{(6+2\sqrt{45})(7+5\sqrt{5})}{12 \times 38}\, r_{ec}^{12} =$$

$$= \frac{(6+2\times 3\times\sqrt{5})(7+5\sqrt{5})}{12 \times 38}\, r_{ec}^{12} = \frac{(1+\sqrt{5})(7+5\sqrt{5})}{2 \times 38}\, r_{ec}^{12} =$$

$$= \frac{7+7\sqrt{5}+5\sqrt{5}+25}{2\times 38}\, r_{ec}^{12} = \frac{32+12\sqrt{5}}{2\times 38}\, r_{ec}^{12} = \boxed{\frac{8+3\sqrt{5}}{19}\, r_{ec}^{12}} \qquad (14)$$

4.6) Altura "h_6" de las pirámides auxiliares rectas, exagonales regulares.

Se obtiene como diferencia del radio "r_{ec}^{12}" de la esfera circunscrita al dodecaedro generador (dato del ejercicio), y del radio "r_{ei}^{XIII-6}" (fórmula (14)).- Así pues, será:

$$\boxed{h_6} = r_{ec}^{12} - r_{ei}^{XIII-6} = r_{ec}^{12} - \frac{8+3\sqrt{5}}{19}\, r_{ec}^{12} = \left(1 - \frac{8+3\sqrt{5}}{19}\right) r_{ec}^{12} =$$

$$= \frac{19-8-3\sqrt{5}}{19}\, r_{ec}^{12} = \boxed{\frac{11-3\sqrt{5}}{19}\, r_{ec}^{12}} \qquad (15)$$

UNE A4 210 x 297

[illegible] Enero 1981

4.7) Arista "a_6" de las pirámides auxiliares rectas, exagonales, regulares

Su valor es el de la hipotenusa de un triángulo rectángulo, siendo sus catetos: Uno, la altura "$h_6 = \frac{11-3\sqrt{5}}{19} r_{ec}^{12}$" (ver fórmula (15), y el otro, el radio "$r_{c\text{-}6} = \frac{\sqrt{15}+9\sqrt{3}}{57} r_{ec}^{12}$" (ver fórmula (13). Por consiguiente, tendremos:

$$\boxed{a_6} = \sqrt{(h_6)^2 + (r_{c\text{-}6})^2} = \sqrt{\left(\frac{11-3\sqrt{5}}{19} r_{ec}^{12}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{15}+9\sqrt{3}}{57} r_{ec}^{12}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{\left(\frac{11-3\sqrt{5}}{19}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{15}+9\sqrt{3}}{57}\right)^2}\, r_{ec}^{12} \cong \boxed{0,40\,93\,86\,36\,6\ldots \times r_{ec}^{12}} \quad (16)$$

Las magnitudes necesarias para la construcción de este modelo, se obtienen numéricamente de las fórmulas (10) (11) y (16). Para $r_{ec}^{12} = 110$ mm., sus valores, son:

a) Arista "a_{12}" del dodecaedro generador (fórmula 10)

$$\boxed{a_{12}} = \frac{\sqrt{15}-\sqrt{3}}{3} r_{ec}^{12} \cong 0,71\,36\,44\,17\,9\ldots \times 110 \cong \boxed{78,5 \text{ mm}}$$

---

b) Arista "a_{XIII}" del Arquimediano generado (fórmula 11)

$$\boxed{a_{XIII}} = \frac{\sqrt{15}+9\sqrt{3}}{57} r_{ec}^{12} \cong 0,34\,14\,28\,78\,3\ldots \times 110 = \boxed{37,6 \text{ mm}}$$

UNE A4 210 x 297

Tavares Enero 1981

c) Arista "a_6" de las pirámides auxiliares rectas, exagonales, regulares (fórmula 16)

$$\boxed{a_6} \simeq 0.40\ 93\ 86\ 36\ 5\ldots \times r_{ee}^{12} = 0.40\ 93\ 86\ 36\ 5\ldots \times 110 = \boxed{45,0 \text{ mm}}$$

5.) CONSTRUCCIÓN DEL MODELO CORPÓREO

Para la construcción de este modelo, son necesarias las siguientes piezas:

5.1) DODECAEDRO REGULAR CONVEXO GENERADOR, DE CARAS VACIADAS.

PIEZA Nº 1 CARAS SUPERFICIALES 12 unidades

Iguales a la pieza 1 del modelo M-4.102

PIEZA Nº 2 UNIONES ARISTAS 30 unidades

Iguales a la pieza 2 del modelo M-4.102

5.2) ARQUIMEDIANO XIII GENERADO, DE CARAS MACIZAS

PIEZA Nº 3 CARAS SUPERFICIALES PENTAGONALES 12 unidades

UNE A4 210 x 297

Modelo M-45.5

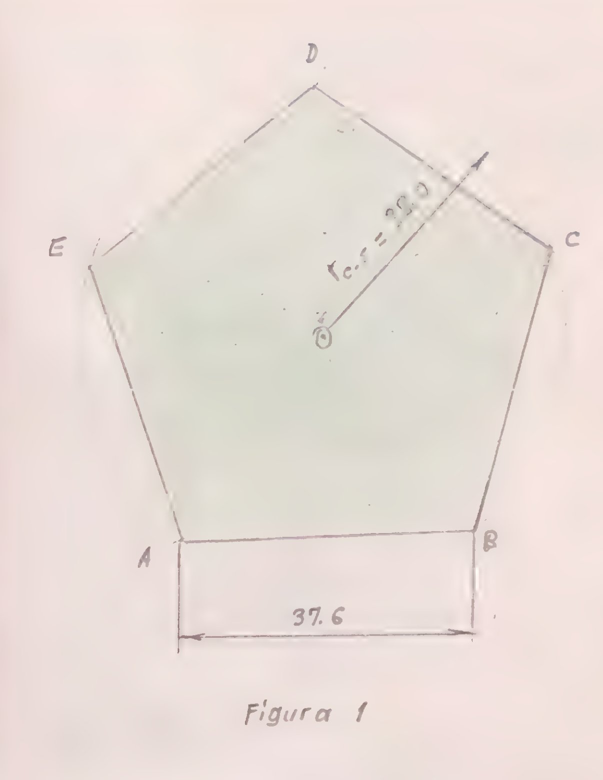


Figura 1

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 1. Para mayor exactitud en el trazado de este pentágono regular convexo, calculamos previamente el radio r_{c-5} de su circunferencia circunscrita (ver fórmula 3, del ejercicio G.P. 1400-44)

$$r_{c-5} = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}} \times 37.6 \cong 0,85065 \times 37.6 = 32,0 \text{ mm}$$

PIEZA Nº 3 12 (u)

Figura 1

PIEZA Nº 4 CARAS SUPERFICIALES EXAGONALES 20 unidades

Su forma y dimensiones, se detallan en la figura 2

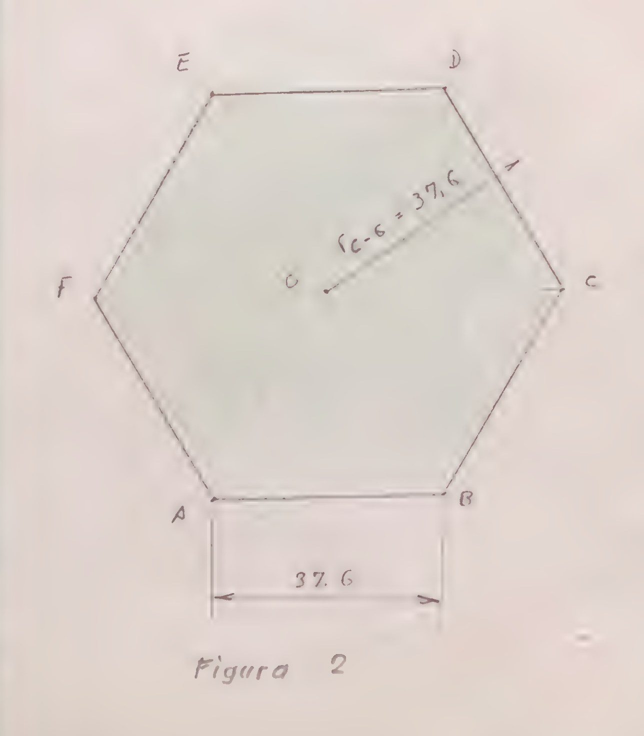


Figura 2

PIEZA Nº 4

20 (u)

Figura 2

		Modelo M-45.5

PIEZA Nº 5 REFUERZO NORMAL INTERIOR DE LAS CARAS SUPERFICIALES PENTAGONALES 12 unidades

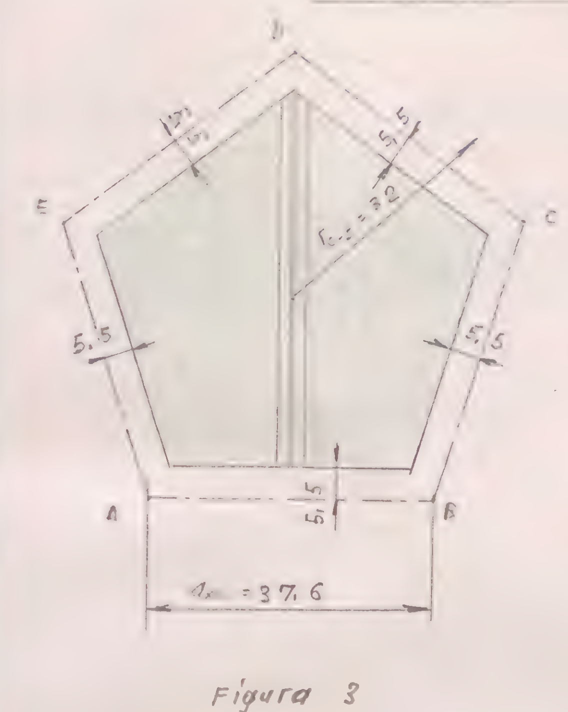


Figura 3

La forma y dimensiones se deducen de las del pentágono regular ABCDE de la figura 1, y se detallan en la figura 3.

PIEZA Nº 5 12 (u)

Figura 3

PIEZA Nº 6 REFUERZO NORMAL INTERIOR DE LAS CARAS SUPERFICIALES EXAGONALES 20 unidades

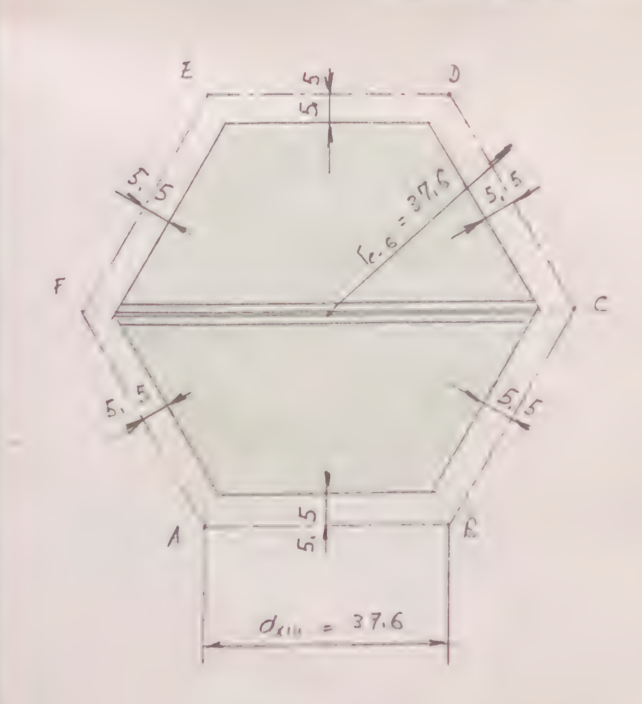


Figura 4

La forma y dimensiones se deducen de las del exágono regular ABCDEF de la figura 2, y se detallan en la figura 4

PIEZA Nº 6

20 (u)

Figura 4

Tavares Enero 1981

		Modelo M- 45.5

PIEZA Nº 7 REFUERZO TRANSVERSAL INTERIOR DE LAS CARAS SUPERFICIALES PENTAGONALES 24 unidades
(simétricas dos a dos)

La forma y dimensiones se detallan en la figura 5; su colocación en la figura ?.

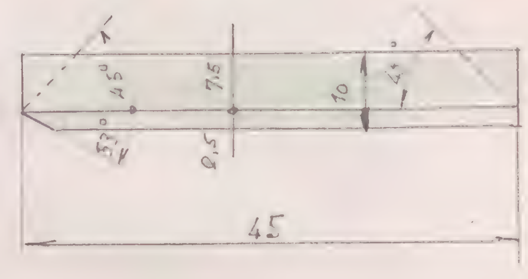


Figura 5

PIEZA Nº 7 24 (U)
(simétricas dos a dos

Figura 5

PIEZA Nº 8 REFUERZO TRANSVERSAL INTERIOR DE LAS CARAS SUPERFICIALES EXAGONALES 40 unidades

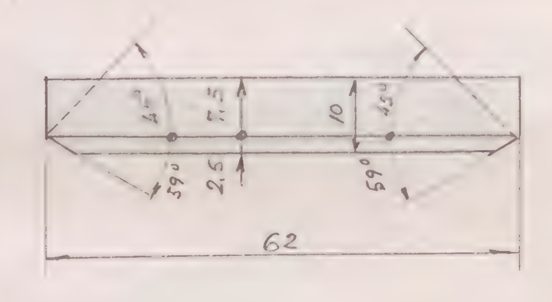


Figura 6

La forma y dimensiones se detallan en la figura 6; su colocación en la figura 4.

PIEZA Nº 8 40 (u)

Figura 6

PIEZA Nº 9 UNIONES ARISTAS 90 unidades

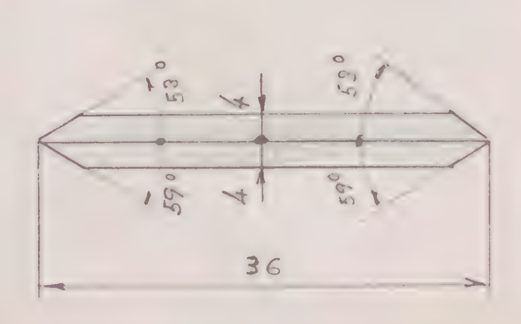


Figura 7

La forma y dimensiones se detallan en la figura 7

PIEZA Nº 9 90 (u)

Figura 7

PIEZA Nº 10 FORRO COLOREADO EN LAS CARAS PENTAGONALES 12 unidades.

La forma y dimensiones se deducen de las del pentágono ABCDE de la figura 1, y se detallan en la figura 8

PIEZA Nº 10 12 (u)

Figura 8

D
E
C
A
B
2
2
2
2
2
$r_{c.5} = 32$
$\emptyset_{x10} = 37.6$

Figura 8

PIEZA Nº 11 FORRO COLOREADO EN LAS CARAS EXAGONALES 20 unidades

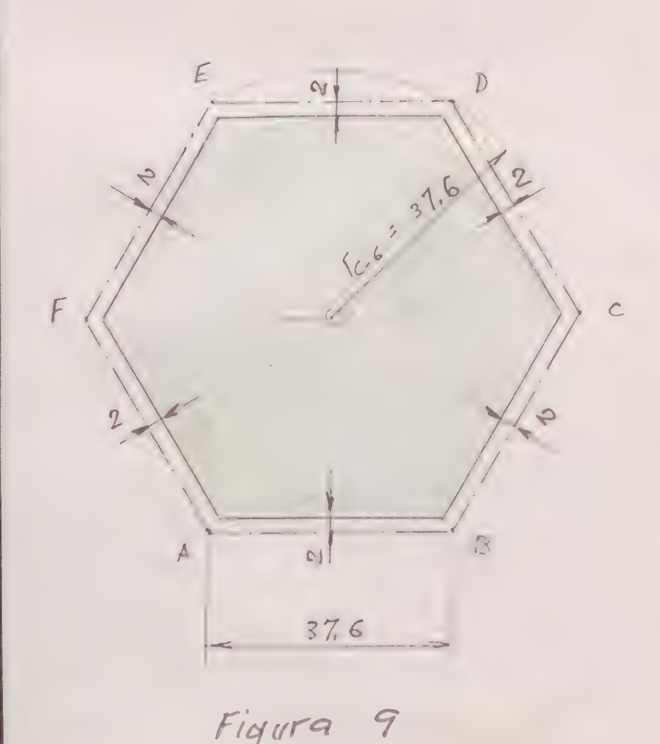


Figura 9

La forma y dimensiones se deducen de las del exágono ABCDEF de la figura 2, y se detallan en la figura 9

PIEZA Nº 11

20 (u)

Figura 9

5.3) PIRÁMIDES AUXILIARES RECTAS, EXAGONALES, REGULARES, DE CARAS VACIADAS.

PIEZA Nº 12 DESARROLLO LATERAL . 20 unidades

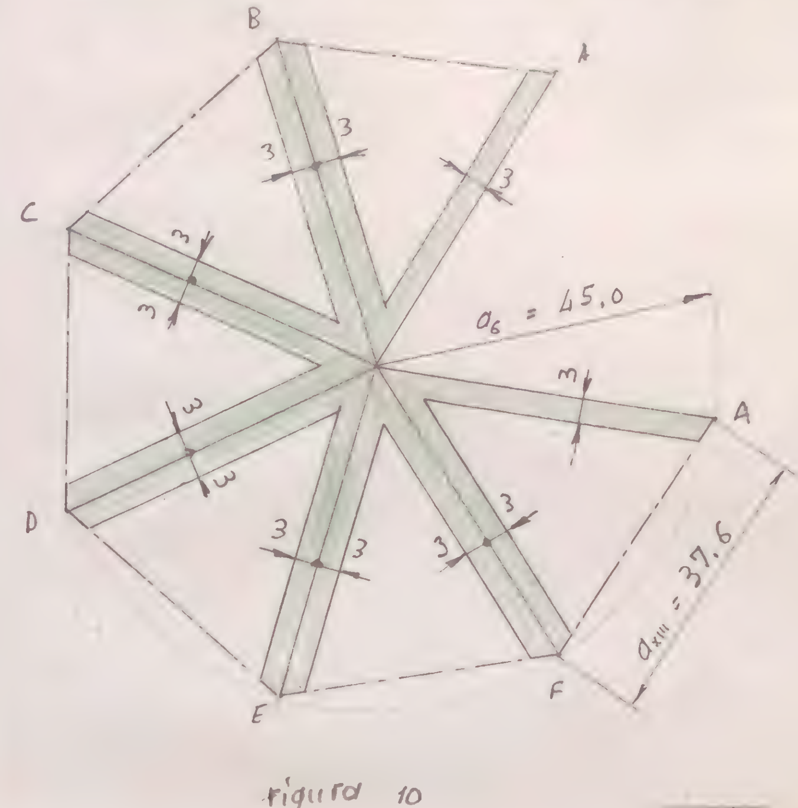


figura 10

AB = BC = CD = DE = EF = FA = = 37.6

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 10

PIEZA Nº12

20 (u)

Figura 10

PIEZA Nº 13 UNIONES ARISTAS 120 unidades

Su forma y dimensiones se detallan en la figura número 11

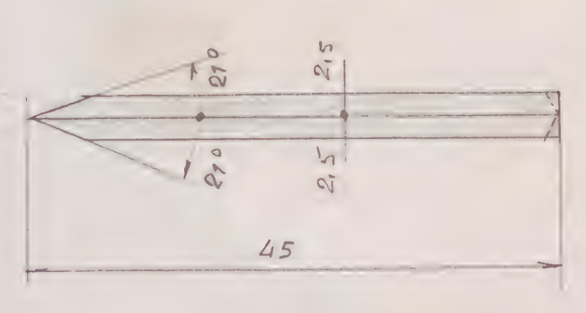


Figura 11

PIEZA Nº 13

120 (u)

Figura 11

UNE A4 210 x 297

Alvarez Enero 1981

MODELO M-45.5 Patrones

	MODELOS CORPÓREOS	Modelo M-45.6

EJECUTADO

VARIANTE DEL MODELO CORPÓREO M-45.5, CONSISTENTE EN ADICIONAR AL MISMO, DOCE PIRÁMIDES RECTAS, PENTAGONALES, REGULARES, DE CARAS VACIADAS, QUE TENGAN POR BASES LAS CARAS PENTAGONALES DEL "ARQUIMEDIANO XIII" GENERADO, Y POR VÉRTICES, LAS PROYECCIONES, SOBRE LA ESFERA CIRCUNSCRITA AL DODECAEDRO GENERADOR, DE LOS CENTROS DE LAS CARAS PENTAGONALES, DESDE EL CENTRO "O" DEL POLIEDRO GENERADOR.

Radio de la esfera circunscrita:

$$r_{ec}^{12} = 110 \text{ mm.}$$

UNE A4 210 x 297

ENUNCIADO: Construir el modelo corpóreo obtenido al adicionar al modelo M-45.5, doce pirámides rectas, pentagonales regulares, de caras vaciadas, que tengan por bases las caras pentagonales del "Arquimediano $\overline{XIII}$" generado, y por vértices las proyecciones, sobre la esfera circunscrita al dodecaedro generador, de los centros de las caras pentagonales desde el centro "O" del poliedro generador.

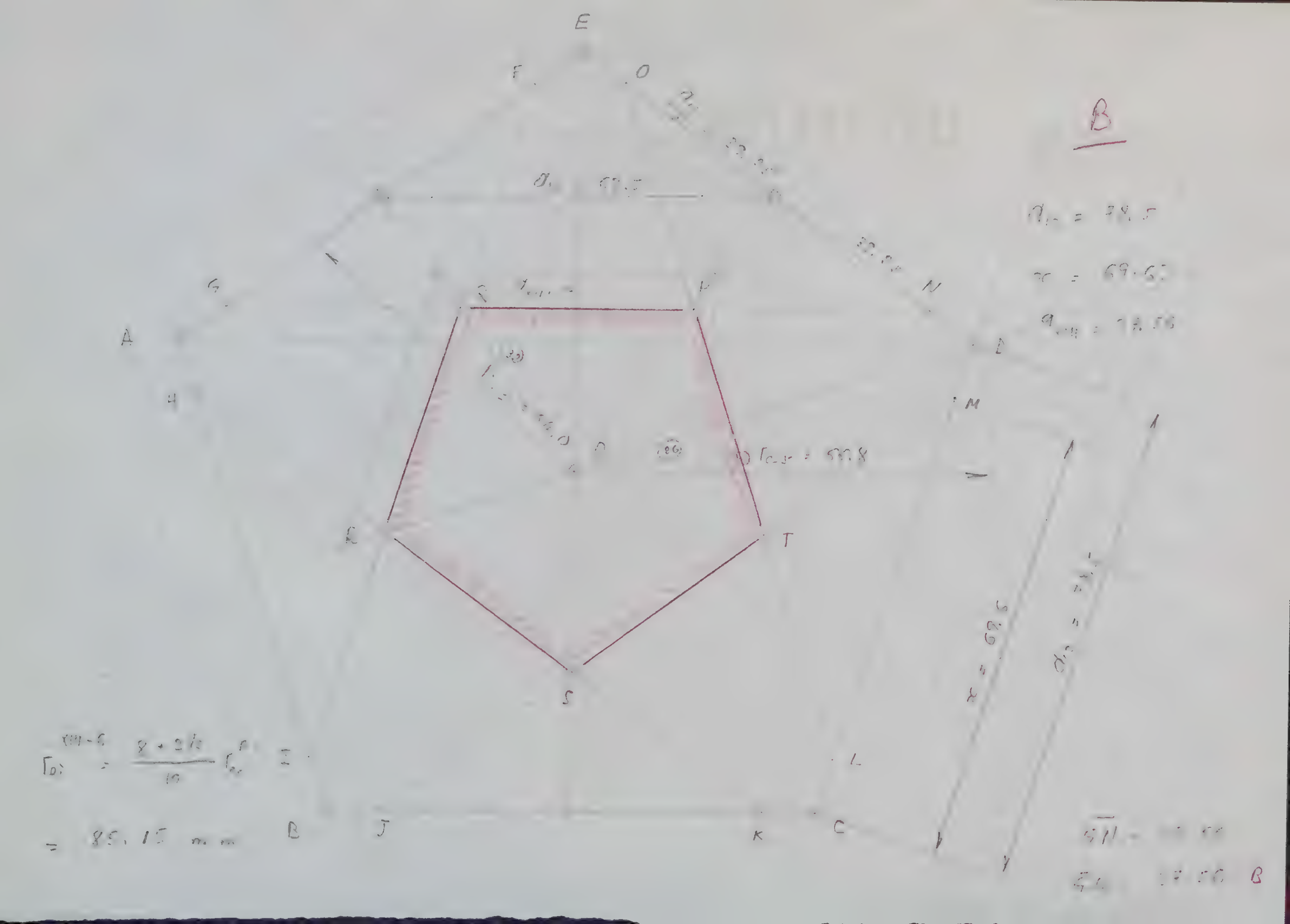
Como se deduce de este enunciado, ha de construirse previamente un modelo igual al M-45.5, al cual ha de añadírsele doce pirámides rectas, pentagonales, regulares, de base pentagonal, y de caras vaciadas, cuyo desarrollo y dimensiones estudiamos a continuación.

La altura "h_5" de dichas pirámides, se obtiene como diferencia del radio "r_{ec}^{12}" de la esfera circunscrita al dodecaedro generador regular convexo, y del radio "$r_{ei}^{\overline{XIII}-5}$" de la esfera tangente a las caras pentagonales del Arquimediado $\overline{XIII}$ generado. Así pues, será:

$$h_5 = r_{ec}^{12} - r_{ei}^{XIII-5} \qquad (1)$$

El radio r_{ec}^{12}, se obtuvo en el ejercicio G.E. nº .... Lámina 4,

UNE A4 210 x 297


E
F
O
B
A
H
N
M
R
T
S
L
J
K
C
B

$a_{13} = \underline{78.50}$ mm ,, $a_{XIII} = \dfrac{\sqrt{15} + 9\sqrt{[illegible]}}{5 [illegible]} \cdot 110 = \underline{37.56}$ mm

$\underline{h_5} = \left(1 - \sqrt{\dfrac{5 + 2\sqrt{5}}{15}}\right) \times 110 = \underline{22,59}$ mm

$\underline{r_{c-5}} = \sqrt{\dfrac{5 + \sqrt{5}}{10}} \times 37,56 = \underline{31,95 \text{ mm}}$ B

$\underline{r_{ei}}^{XIII-5} = \sqrt{\dfrac{25 + 11\sqrt{5}}{10}} \times 78.50 = \underline{87.41}$ R

Comprobación

$r_{ei}^{XIII-5} + h_5 = 87.41 + 22.59 = 110$ mm

$\underline{a_5} = \sqrt{(h_5)^2 + (r_{c-5})^2} = \sqrt{22,59^2 + 31,95^2} = \underline{39.12}$ mm

$\underline{a_5} = \sqrt{\left(1 - \sqrt{\dfrac{5 + 2\sqrt{5}}{15}}\right)^2 + \left[\overset{0.85}{\sqrt{\dfrac{5 + \sqrt{5}}{10}}} \times \overset{0.34}{\dfrac{\sqrt{15} + 9\sqrt{5}}{3 \times 19}}\right]^2} \times 110 =$

$= \sqrt{0,0421\,66\,786 + 0,08\,43\,53\,45\,9} \times 110 = \sqrt{0,12\,65\,20\,24\,5} \times 110 =$

$= 0,35\,56\,96\,84\,5 \ldots \times 110 = \underline{39.13}$

en función de la arista "a_{12}" del dodecaedro generador.- Su valor es:

$$r_{ec}^{12} = \frac{\sqrt{15} + \sqrt{3}}{4} a_{12} \qquad (2)$$

El radio "r_{ei}^{XIII-5}" de la esfera tangente a las caras pentagonales del Arquimediano $\overline{XIII}$, se obtuvo en el ejercicio G.E. nº..... Lámina 45. Su valor, en función de la arista "a_{XIII}" de dicho Arquimediano, es

$$r_{ei}^{XIII-5} = \sqrt{\frac{125 + 41\sqrt{5}}{40}}\; a_{XIII} \qquad (3)$$

y sustituyendo "a_{XIII}" por su valor "$a_{XIII} = \frac{7 + 5\sqrt{5}}{38} a_{12}$" (ver fórmula (9) del ejercicio M - 45.5), tendremos:

$$r_{ei}^{XIII-5} = \sqrt{\frac{125 + 41\sqrt{5}}{40}} \times \frac{7 + 5\sqrt{5}}{38} a_{12} = \sqrt{\frac{125 + 41\sqrt{5}}{40} \times \left(\frac{7 + 5\sqrt{5}}{38}\right)^2}\; a_{12} =$$

$$= \sqrt{\frac{(125 + 41\sqrt{5}) \times (7 + 5\sqrt{5})^2}{40 \times 38^2}}\; a_{12} = \sqrt{\frac{(125 + 41\sqrt{5}) \times (49 + 125 + 70\sqrt{5})}{40 \times 38^2}}\; a_{12} =$$

$$= \sqrt{\frac{(125 + 41\sqrt{5}) \times (174 + 70\sqrt{5})}{40 \times 38^2}}\; a_{12} = \sqrt{\frac{125 \times 174 + 174 \times 41\sqrt{5} + 125 \times 70\sqrt{5} + 41 \times 350}{40 \times 38^2}}\; a_{12} =$$

$$= \sqrt{\frac{21.750 + 7.134\sqrt{5} + 8.750\sqrt{5} + 14.350}{40 \times 38^2}}\; a_{12} = \sqrt{\frac{36.100 + 15.884\sqrt{5}}{40 \times 38^2}}\; a_{12} =$$

$$= \sqrt{\frac{25 \times 38^2 + 11 \times 38^2\sqrt{5}}{40 \times 38^2}}\; a_{12} = \sqrt{\frac{25 + 11\sqrt{5}}{40}}\; a_{12}$$

de donde se obtiene finalmente

$$r_{ei}^{XIII-5} = \sqrt{\frac{25 + 11\sqrt{5}}{40}}\; a_{12} \qquad (4)$$

Alvarez Febrero 1981

UNE A4 210 x 297

Destaquemos que esta fórmula (4) hubiera podido obtenerse más fácilmente, teniendo presente que en el estudio realizado en el modelo M-45.5, de la truncadura de vértices de un dodecaedro regular convexo de arista "a_{12}" a la distancia "$x = \frac{27 + 3\sqrt{5}}{38} a_{12}$", obtuvimos que el poliedro núcleo resultante era un "ARQUIMEDIANO XIII", y que el plano secante produce en las caras del mencionado dodecaedro generador, pentágonos regulares convexos, situados sobre dichas caras pentagonales, que son a su vez caras pentagonales de dicho Arquimediano XIII. Por consiguiente, la esfera de radio "r_{ei}^{XIII-5}", tangente a las caras pentagonales del Arquimediano generado, es coincidente con la esfera de radio "r_{ei}^{12}" inscrita en el dodecaedro generador, por lo que será $r_{ei}^{XIII-5} = r_{ei}^{12}$, siendo pues $r_{ei}^{12} = \sqrt{\frac{25 + 11\sqrt{5}}{40}}\, a_{12}$ valor que se obtuvo en el ejercicio G.E. nº__ Lámina 4, coincidente con el de la fórmula (6) deducida anteriormente en este ejercicio

---

Como continuación de este estudio analítico, sustituyamos en (1) los valores (2) y (4), con lo que tendremos:

$$h_5 = r_{ec}^{12} - r_{ei}^{XIII-5} = \frac{\sqrt{15} + \sqrt{3}}{4} a_{12} - \sqrt{\frac{25 + 11\sqrt{5}}{40}}\, a_{12} =$$

$$= \left[\frac{\sqrt{15} + \sqrt{3}}{4} - \sqrt{\frac{25 + 11\sqrt{5}}{40}}\right] a_{12} \cong 0,28\,77\,42\,17\,5\ldots \times a_{12} \qquad (5)$$

Sustituyendo en (5) el valor "$a_{12} = \frac{\sqrt{15} - \sqrt{3}}{3} r_{ec}^{12}$" será fór-

mula (10) del ejercicio M-45.5, tendremos:

$$\boxed{h_5} = \left[\frac{\sqrt{15}+\sqrt{3}}{4} - \sqrt{\frac{25+11\sqrt{5}}{40}}\right] a_{12} = \left[\frac{\sqrt{15}+\sqrt{3}}{4} - \sqrt{\frac{25+11\sqrt{5}}{40}}\right] \times \frac{\sqrt{15}-\sqrt{3}}{3}\, r_{ec}^{12} =$$

$$= \left[\frac{\sqrt{15}+\sqrt{3}}{4} \times \frac{\sqrt{15}-\sqrt{3}}{3} - \sqrt{\frac{25+11\sqrt{5}}{40}} \times \frac{\sqrt{15}-\sqrt{3}}{3}\right] r_{ec}^{12} =$$

$$= \left[\frac{15-3}{12} - \sqrt{\frac{25+11\sqrt{5}}{40} \times \left(\frac{\sqrt{15}-\sqrt{3}}{3}\right)^2}\,\right] r_{ec}^{12} = \left[1 - \sqrt{\frac{(25+11\sqrt{5})(\sqrt{15}-\sqrt{3})^2}{40 \times 9}}\,\right] r_{ec}^{12} =$$

$$= \left[1 - \sqrt{\frac{(25+11\sqrt{5}) \times (15+3-2\sqrt{45})}{40 \times 9}}\,\right] r_{ec}^{12} = \left[1 - \sqrt{\frac{(25+11\sqrt{5}) \times (18-6\sqrt{5})}{40 \times 9}}\,\right] r_{ec}^{12} =$$

$$= \left[1 - \sqrt{\frac{(25+11\sqrt{5})(3-\sqrt{5})}{60}}\,\right] r_{ec}^{12} = \left[1 - \sqrt{\frac{75+33\sqrt{5}-25\sqrt{5}-55}{60}}\,\right] r_{ec}^{12} =$$

$$= \left(1 - \sqrt{\frac{20+8\sqrt{5}}{60}}\right) r_{ec}^{12} = \left(1 - \sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{15}}\right) r_{ec}^{12}$$ de donde se obtiene finalmente

$$\boxed{h_5 = \left(1 - \sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{15}}\right) r_{ec}^{12}} \qquad (6)$$

Para obtener la longitud de la arista "a_5" de las pirámides pentagonales, tendremos en cuenta que "a_5" es la hipotenusa de un triángulo rectángulo, uno de cuyos catetos es "h_5", y el otro, el radio "r_{c-5}" de la circunferencia circunscrita a la cara pentagonal del Arquimediano XIII. Así pues, será:

$$a_5 = \sqrt{(h_5)^2 + (r_{c.5})^2} \qquad (7)$$

El radio "$r_{c.5}$" de la circunferencia circunscrita a un pentágono regular convexo de lado "l_5", es: (ver fórmula 3 del ejercicio G.P. 1.400-44)

$$r_{c.5} = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}\; l_5 \qquad (8)$$

En la fórmula (8), aplicada a este estudio, tendremos que $l_5 = a_{XIII}$, siendo a su vez $a_{XIII} = \frac{7+5\sqrt{5}}{38} a_{12}$ (ver fórmula (9) del modelo M-45.5), y también es $a_{12} = \frac{\sqrt{15}-\sqrt{3}}{3} r_{ec}^{12}$ (ver fórmula (10) del modelo M-45.5), por lo que sustituyendo valores, tendremos:

$$l_5 = a_{XIII} = \frac{7+5\sqrt{5}}{38} a_{12} = \frac{7+5\sqrt{5}}{38} \times \frac{\sqrt{15}-\sqrt{3}}{3} r_{ec}^{12} =$$

$$= \frac{(7+5\sqrt{5})\times(\sqrt{15}-\sqrt{3})}{2\times 3\times 19} r_{ec}^{12} = \frac{7\sqrt{15}+5\sqrt{75}-7\sqrt{3}-5\sqrt{15}}{2\times 3\times 19} r_{ec}^{12} =$$

$$= \frac{2\sqrt{15}+25\sqrt{3}-7\sqrt{3}}{2\times 3\times 19} r_{ec}^{12} = \frac{2\sqrt{15}+18\sqrt{3}}{2\times 3\times 19} r_{ec}^{12} = \frac{\sqrt{15}+9\sqrt{3}}{57} r_{ec}^{12} \qquad (9)$$

valor que sustituido en (8), nos dará:

$$r_{c.5} = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}\; l_5 = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}} \times \frac{\sqrt{15}+9\sqrt{3}}{57} r_{ec}^{12} = \qquad (10)$$

Sustituyendo en (7) los valores (6) y (10), tendremos:

$$a_5 = \sqrt{(h_5)^2 + (r_{c.5})^2} = \sqrt{\left[\left(1-\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{15}}\right) r_{ec}^{12}\right]^2 + \left[\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}} \times \frac{\sqrt{15}+9\sqrt{3}}{3\times 19} r_{ec}^{12}\right]^2} =$$

Calvara Febrero 1981

Modelo M-45.6

$$= \sqrt{\left(1-\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{15}}\right)^2 + \left(\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}} \times \frac{\sqrt{15}+9\sqrt{3}}{57}\right)^2}\ r_{ec}^{12} =$$

$$= \sqrt{\left(1+\frac{5+2\sqrt{5}}{15} - 2\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{15}}\right) + \frac{5+\sqrt{5}}{10} \times \frac{(\sqrt{15}+9\sqrt{3})^2}{57^2}}\ r_{ec}^{12} =$$

$$= \sqrt{\frac{20+2\sqrt{5}}{15} - 2\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{15}} + \frac{5+\sqrt{5}}{10} \times \frac{15+81\times 3+18\sqrt{45}}{57^2}}\ r_{ec}^{12} =$$

$$= \sqrt{\frac{20+2\sqrt{5}}{15} - 2\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{15}} + \frac{5+\sqrt{5}}{10} \times \frac{258+54\sqrt{5}}{57^2}}\ r_{ec}^{12} =$$

$$= \sqrt{\frac{20+2\sqrt{5}}{15} - 2\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{15}} + \frac{(5+\sqrt{5}) \times (258+54\sqrt{5})}{10 \times 57^2}}\ r_{ec}^{12} =$$

$$= \sqrt{\frac{20+2\sqrt{5}}{15} - 2\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{15}} + \frac{1290+258\sqrt{5}+270\sqrt{5}+270}{10 \times 57^2}}\ r_{ec}^{12} =$$

$$= \sqrt{\frac{20+2\sqrt{5}}{15} - 2\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{15}} + \frac{1560+528\sqrt{5}}{10 \times 57^2}}\ r_{ec}^{12} =$$

$$= \sqrt{\frac{20+2\sqrt{5}}{15} + \frac{1560+528\sqrt{5}}{10 \times 57^2} - 2\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{15}}}\ r_{ec}^{12} =$$

$$= \sqrt{\frac{20+2\sqrt{5}}{15} + \frac{780+264\sqrt{5}}{5 \times 57^2} - 2\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{15}}}\ r_{ec}^{12} =$$

$$= \sqrt{\frac{5\times 57^2 \times 20 + 10\times 57^2\sqrt{5} + 780\times 15 + 264\times 15\sqrt{5}}{15\times 5\times 57^2} - 2\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{15}}}\ r_{ec}^{12} =$$

$$= \sqrt{\frac{324.900 + 32490\sqrt{5} + 11.700 + 3960\sqrt{5}}{15\times 5\times 57^2} - 2\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{15}}}\ r_{ec}^{12} =$$

UNE A4 210 x 297

Tavares Febrero 1981

Modelo M-45.6

$$= \sqrt{\frac{336.600 + 36.450\sqrt{5}}{(15 \times 5) \times 57^2} - 2\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{15}}}\; r_{ec}^{12} =$$

$$= \sqrt{\frac{4.488 + 486\sqrt{5}}{57^2} - 2\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{15}}}\; r_{ec}^{12} = \sqrt{\frac{6 \times (748 + 81\sqrt{5})}{9 \times 19^2} - 2\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{15}}}\; r_{ec}^{12} =$$

$$= \sqrt{\frac{2 \times (748 + 81\sqrt{5})}{3 \times 19^2} - 2\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{15}}}\; r_{ec}^{2} = \sqrt{\frac{2 \times (748 + 81\sqrt{5})}{1083} - 2\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{15}}}\; r_{ec}^{12}$$

Del desarrollo anterior se obtiene finalmente:

$$\boxed{a_5 = \sqrt{\frac{2 \times (748 + 81\sqrt{5})}{1083} - 2\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{15}}}\; r_{ec}^{12}} \qquad (11)$$

Las fórmulas (9) y (11) nos permiten calcular los elementos necesarios para el desarrollo lateral de las pirámides pentagonales que se adicionan al modelo M-45.5, para obtener el que se estudia.

Para este caso particular en el que es $r_{ec}^{12} = 110$ mm, será:

$$\boxed{l_5} = a_{XIII} = \frac{\sqrt{15} + 9\sqrt{3}}{57}\, r_{ec}^{12} \simeq 0,34\,14\,28\,78\,3\ldots \times 110 \simeq \boxed{37,6 \text{ mm}}$$ y

$$\boxed{a_5} = \sqrt{\frac{2 \times (748 + 81\sqrt{5})}{1083} - 2\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{15}}}\; r_{ec}^{12} \simeq 0,35\,56\,96\,843\ldots \times 110 \simeq \boxed{39,1 \text{ mm}}$$

Para la construcción de este modelo, se precisan las siguientes piezas:

A) MODELO CORPÓREO DEL ARQUIMEDIANO XIII, OBTENIDO POR TRUNCADURA DE VÉRTICES DE UN DODECAEDRO REGULAR CONVEXO, A LA DISTANCIA " $x = \frac{27 + 3\sqrt{5}}{38} a_{12}$ ".

Piezas 1 al 13, iguales a las del modelo M-45.5

B) PIRÁMIDES RECTAS, PENTAGONALES, REGULARES, DE CARAS VACIADAS, QUE SE ADICIONAN AL MODELO M-45.5.

PIEZA Nº 14 DESARROLLO LATERAL DE LAS PIRÁMIDES ADICIONADAS. 12 unidades

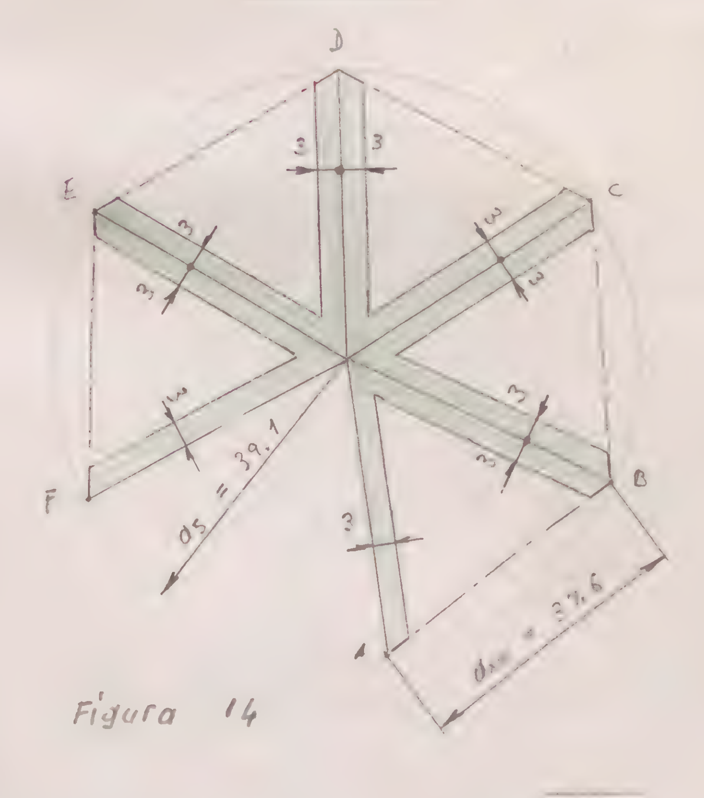


Figura 14

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 14

AB = BC = CD = DE = EF = = 37,6 mm

PIEZA Nº 14

12 (u)

Figura 14

PIEZA Nº 15 UNIONES ARISTAS 60 unidades.

Su forma y dimensiones se detallan en la figura nº 15

UNE A4 210 x 297

Cabrera Enero 1981

Modelo M- 45.6

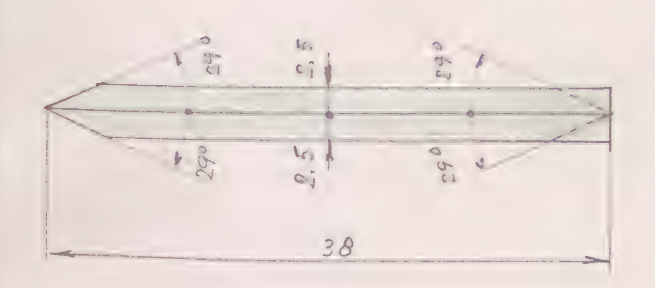


Figura 15

PIEZA Nº 15   60 (u)

Figura 15

ESTUDIO COMPLEMENTADIO

Si unimos cada vértice de las pirámides adicionadas de la figura 14, con las dos más próximos que les rodean en el espacio, se nos formará un icosaedro regular convexo, conjugado del dodecaedro generador, cuyas aristas se cruzan perpendicularmente con las de dicho dodecaedro. Este icosaedro regular convexo, estará inscrito en la misma esfera circunscrita al dodecaedro generador.

La longitud de su arista "a_{20}", se deduce de la fórmula "$r_{ec}^{20} = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4} a_{20}$" deducida en el ejercicio G.E. nº.... Lámina 5, despejando en ella a_{20}. Su valor será pues:

$$a_{20} = r_{ec}^{20} : \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4} = \frac{4}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}} r_{EC}^{20} = 4 \times \sqrt{\frac{1}{10+2\sqrt{5}}}\, r_{ec}^{20} =$$

$$= 4 \times \sqrt{\frac{10-2\sqrt{5}}{100-20}}\, r_{ec}^{20} = 4 \times \sqrt{\frac{10-2\sqrt{5}}{80}}\, r_{ec}^{20} = 4 \times \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{40}}\, r_{ec}^{20} = 2 \times \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}\, r_{ec}^{20}$$

Su valor será pues: $\boxed{a_{20}} = 2 \times \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}} \times 110 \cong 1.05\,14\,62\,22\,4 \times 110 \cong$ $\cong \boxed{115.7 \text{ mm}}$

Esta propiedad se ha destacado en el presente modelo

Febrero 1981

MODELO M- 45.6 Patrones

MODELO CORPÓREO DEL "ARQUIMEDIANO XIII", OBTENIDO POR TRUNCADURA DE VÉRTICES DE UN ICOSAEDRO REGULAR CONVEXO, DE ARISTA "a_{20}", AL TOMAR SOBRE CADA ARISTA, Y DESDE SU VÉRTICE, LA DISTANCIA "$x = \frac{1}{3} a_{20}$".- EL ARQUIMEDIANO OBTENIDO, SE CONSTRUIRÁ CON LAS CARAS MACIZAS, Y EL ICOSAEDRO GENERADOR, CON LAS CARAS VACIADAS EN LOS VÉRTICES TRUNCADOS.

Radio de la esfera circunscrita al icosaedro generador:

$$r_{ec}^{20} = 110 \text{ mm.}$$

UNE A4 210 x 297

Ejercicios de construcción de poliedros MODELOS CORPÓREOS	Modelo M.- 45.7

ENUNCIADO: Construir el modelo corpóreo del "ARQUIMEDIANO XIII", obtenido por truncadura de vértices de un icosaedro regular convexo de arista "a_{20}", al tomar sobre cada arista, y desde su vértice, la distancia "$x = \frac{1}{3} a_{20}$".- El Arquimediano obtenido, se construirá con las caras macizas, y el icosaedro generador, con las caras vaciadas en los vértices truncados.

DATO ÚNICO DE ESTE EJERCICIO: r_{ec}^{20} = radio de la esfera circunscrita al icosaedro generador

$$r_{ec}^{20} = 110 \text{ mm}$$

Teniendo presente lo expuesto en las CONSIDERACIONES PREVIAS del ejercicio "modelo M-40.5" en las que se destaca el proceso geométrico denominado TRUNCADURA DE VÉRTICES de los poliedros regulares convexos, por el que se obtienen muchos de los POLIEDROS ARQUIMEDIANOS, entre los que se encuentra el ARQUIMEDIANO XIII, de este ejercicio, podemos establecer de inmediato las siguientes propiedades del poliedro núcleo que se obtiene por la truncadura de vértices del icosaedro regular a la distancia $x = \frac{1}{3} a_{20}$. El valor de "x" se puede deducir de las condiciones geométricas que ha de cumplir el plano secante, para que éste produzca:

Alvarez Abril 1981

UNE A4 210 x 297

a) En las caras del icosaedro generador, polígonos regulares convexos de doble número de lados que los de las mencionadas caras, cuyos lados son alternativamente coincidentes con los de las mismas, y cuyo número será, por consiguiente, el de caras del mencionado icosaedro generador.

b) En los ángulos sólidos de los vértices, polígonos regulares convexos de tantos lados como caras concurren en los vértices de dichos ángulos sólidos, y situados en el plano secante.

Estas dos condiciones aplicadas al caso propuesto, nos permite conocer las características del poliedro núcleo resultante de esta truncadura de vértices, y al mismo tiempo comprobar la posición del plano secante que la produce.

En efecto: Por la condición a), el poliedro núcleo tendrá veinte caras escagonales, regulares, convexas, (C_6) sobre las caras del poliedro generador; y

Por la condición b), tendrá también doce caras pentagonales, regulares, convexas, (C_5) sobre el plano secante.

Consecuentemente, el poliedro núcleo resultante de esta truncadura de vértices tendrá las siguientes características geométricas:

		Modelo M-45.7

1) Número de caras exagonales regulares		= 20 C_6
2) Número de caras pentagonales regulares		= 12 C_5
3) Número de vértices	$= \dfrac{20 \times 6 + 12 \times 5}{3}$	= 60 V
4) Número de aristas	$= \dfrac{20 \times 6 + 12 \times 5}{2}$	= 90 A
5) Número de caras en cada vértice	=	$1\,C_5 + 2\,C_6$

En consecuencia, y a la vista de los resultados anteriores, se deduce que el poliedro único convexo, resultante de esta truncadura de vértices en el icosaedro regular convexo, es un ARQUIMEDIANO XIII, estudiado y representado en el ejercicio G.E. nº.... - Lámina 45.

Finalmente observemos que para obtener en un triángulo equilátero, un exágono regular convexo de lados alternativamente coincidentes con los del mencionado triángulo, han de truncarse los vértices de éste, a las distancias $x = \frac{1}{3}\,l_3$ (la demostración es elemental).

Las conclusiones anteriores justifican el enunciado de este ejercicio.

CÁLCULO ANALÍTICO DE LONGITUDES

Calculemos previamente las siguientes magnitudes:

UNE A4 210 x 297

Alvarez Abril 1981

1.) Arista "a_{20}" del icosaedro generador

Se deduce de la fórmula "$r_{ec}^{20} = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4} a_{20}$" deducida en el ejercicio G.E. nº.... Lámina 5. Despejando en ella "a_{20}", tendremos:

$$\boxed{a_{20}} = r_{ec}^{20} : \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4} = \frac{4}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}} r_{ec}^{20} = \frac{4\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{10+2\sqrt{5}} r_{ec}^{20} =$$

$$= \frac{2\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{5+\sqrt{5}} r_{ec}^{20} = \frac{2\sqrt{2(5+\sqrt{5})} \times (5-\sqrt{5})}{20} r_{ec}^{20} =$$

$$= \frac{\sqrt{2(5+\sqrt{5})(5-\sqrt{5})^2}}{10} r_{ec}^{20} = \sqrt{\frac{2\times(25-5)(5-\sqrt{5})}{100}} r_{ec}^{20} =$$

$$= \sqrt{\frac{40(5-\sqrt{5})}{100}} r_{ec}^{20} = \sqrt{\frac{4(5-\sqrt{5})}{10}} r_{ec}^{20} = \boxed{2 \times \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}} r_{ec}^{20}} \quad (1)$$

2.) Distancia "x" en que la truncadura de vértices del icosaedro regular convexo, produce el ARQUIMEDIANO XIII

$$\boxed{x} = \frac{1}{3} a_{20} = \frac{1}{3} \times 2 \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}} r_{ec}^{20} = \boxed{\frac{2}{3} \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}} r_{ec}^{20}} \quad (2)$$

3.) Arista "a_{XIII}" del ARQUIMEDIANO XIII

$$\boxed{a_{XIII}} = x = \boxed{\frac{2}{3} \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}} r_{ec}^{20}} \quad (3)$$

Alvarez   Abril 1981

UNE A4 210 x 297

Las anteriores fórmulas (1), (2) y (3), aplicadas al modelo estudiado en el que es $r_{e_c}^{20} = 110$ mm, nos da los siguientes valores numéricos:

(1) $\boxed{a_{20}} = 2\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}\, r_{e_c}^{20} = 2\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}} \times 110 \cong 1,05\ 14\ 62\ 22\ 4... \times 110 \cong$
$= \boxed{115,7 \text{ mm}}$

(2) $\boxed{x} = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}\, r_{e_c}^{20} = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}} \times 110 \cong 0,35\ 04\ 87\ 40\ 8... \times 110 =$
$= \boxed{38,6 \text{ mm}}$

(3) $\boxed{a_{XIII}} = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}\, r_{e_c}^{20} = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}} \times 110 \cong 0.35\ 04\ 87\ 40\ 8... \times 110$
$= \boxed{38.6 \text{ mm}}$

Conocidos los valores numéricos anteriores, puede efectuarse la construcción del modelo propuesto, para lo cual son necesarias las siguientes piezas:

A) ARQUIMEDIANO XIII, GENERADO, DE CARAS MACIZAS.

PIEZA Nº 1 CARAS SUPERFICIALES PENTAGONALES REGULARES

12 unidades

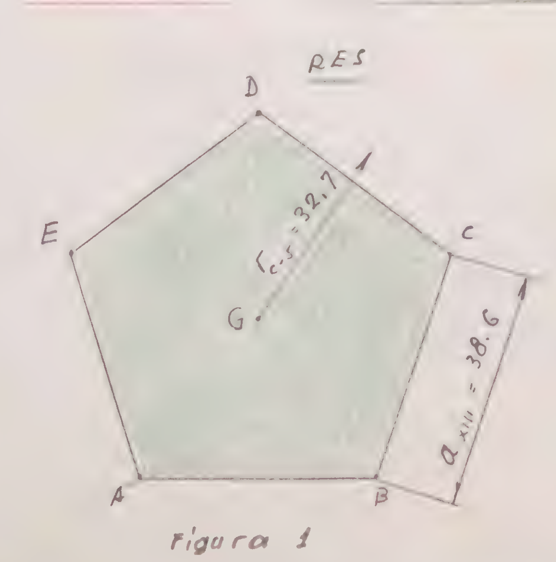


Figura 1

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 1

$r_{c.5} = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}\ a_{XIII} = 32.7$ mm

PIEZA Nº 1 12 (u)

Figura 1

Alvarez Abril 1981

PIEZA Nº 2 CARAS SUPERFICIALES EXAGONALES REGULARES

20 unidades

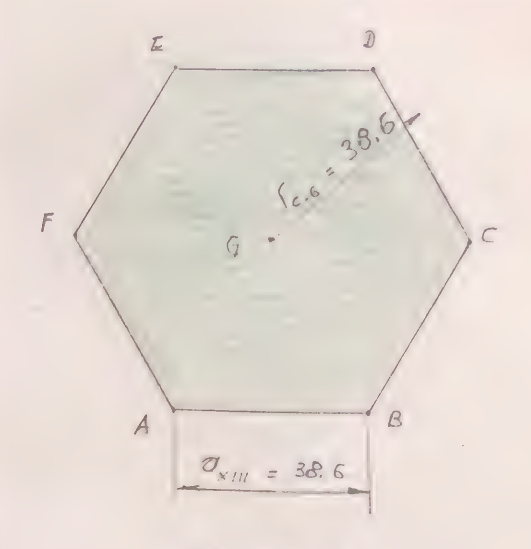


Figura 2

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 2

PIEZA Nº 2 20 (u)

Figura 2

PIEZA Nº 3 REFUERZO NORMAL INTERIOR DE LAS CARAS SUPERFICIALES PENTAGONALES 12 unidades.

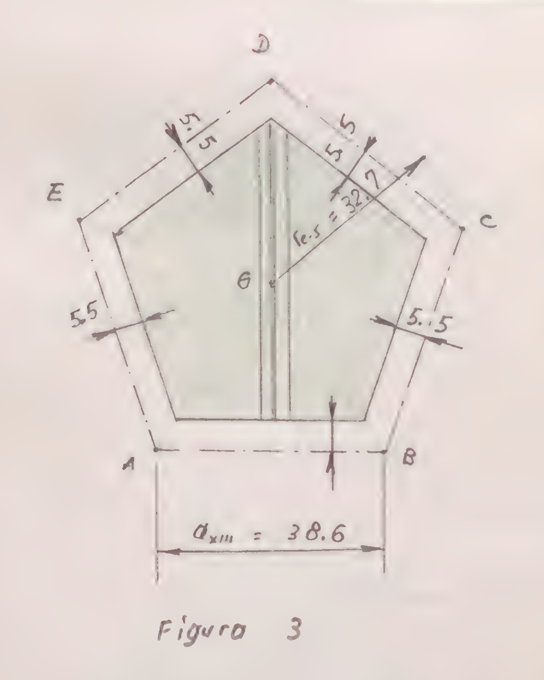


Figura 3

Su forma y dimensiones se deducen de las del pentágono regular ABCDE de la figura 1, y se detallan en la figura 3

PIEZA Nº 3 12 (u)

Figura 3

PIEZA Nº 4 REFUERZO NORMAL INTERIOR DE LAS CARAS SUPERFICIALES EXAGONALES 20 unidades

Su forma y dimensiones, se deducen de las del exágono regular ABCDEF de la figura 2, y se detallan en

Modelo M- 45.7

la figura 4

PIEZA Nº 4

20 (u)

Figura 5

Figura 4

PIEZA Nº 5 REFUERZO TRASVERSAL INTERIOR DE LAS CARAS PENTAGONALES REGULARES 24 unidades.

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 5

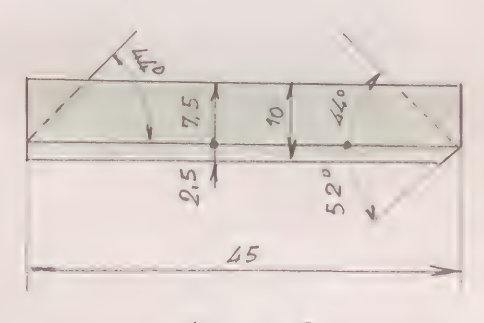


Figura 5

PIEZA Nº 5 24 (u)

Figura 5

PIEZA Nº 6 REFUERZO TRANSVERSAL INTERIOR DE LAS CARAS EXAGONALES REGULARES 40 unidades

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 6

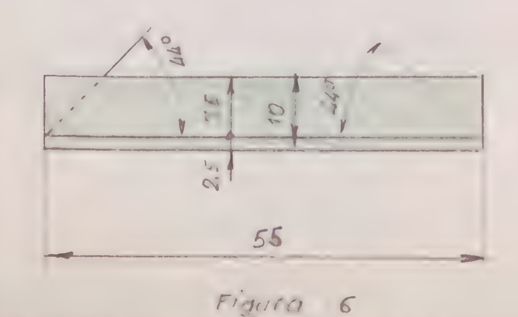


Figura 6

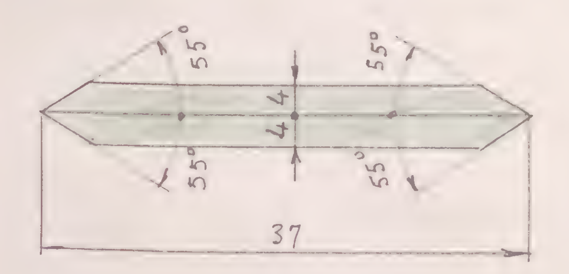
PIEZA Nº 6 40 (u)

Figura 6

Modelo M- 45.7

PIEZA Nº 7 UNIONES ARISTAS 90 unidades

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 7

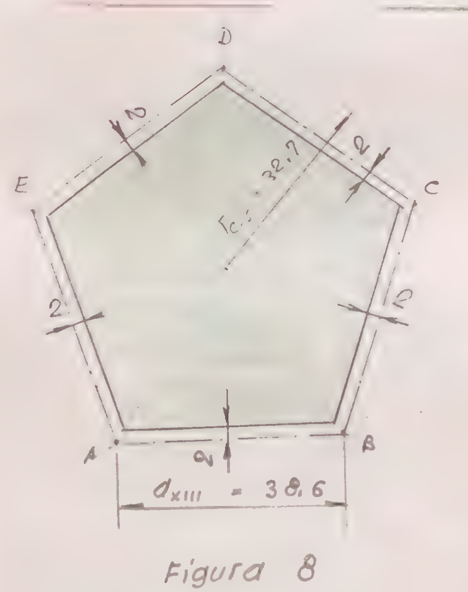


PIEZA Nº 7 90 (u)

Figura 7

Figura 7

PIEZA Nº 8 FORRO COLOREADO EN CARAS PENTAGONALES 12 unidades



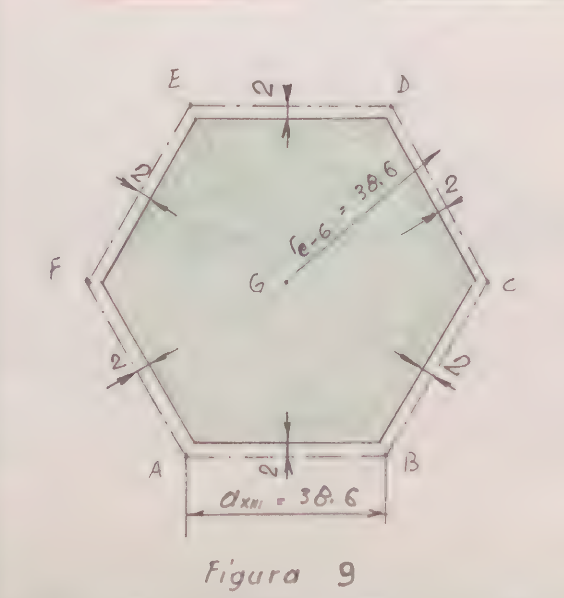
Su forma y dimensiones, se deducen de las del pentágono regular ABCDE de la figura 1, y se detallan en la figura 8

PIEZA Nº 8 12 (u)

Figura 8

Figura 8

PIEZA Nº 9 FORRO COLOREADO EN CARAS EXAGONALES 20 unidades



Su forma y dimensiones, se deducen de las del exágono regular ABCDEF de la figura 2, y se detallan en la figura 9.

PIEZA Nº 9 20 (u)

Figura 9

Figura 9

UNE A4 210 x 297

[signature] Abril 1981

Modelo M - 45.7

B) ICOSAEDRO GENERADOR DE CARAS VACIADAS.

Queda reducido a doce pirámides pentagonales, rectas, regulares, cuyo desarrollo lateral es el siguiente:

PIEZA Nº 10 DESARROLLO LATERAL DE LAS DOCE PIRÁMIDES RECTAS PENTAGONALES 12 unidades

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 10

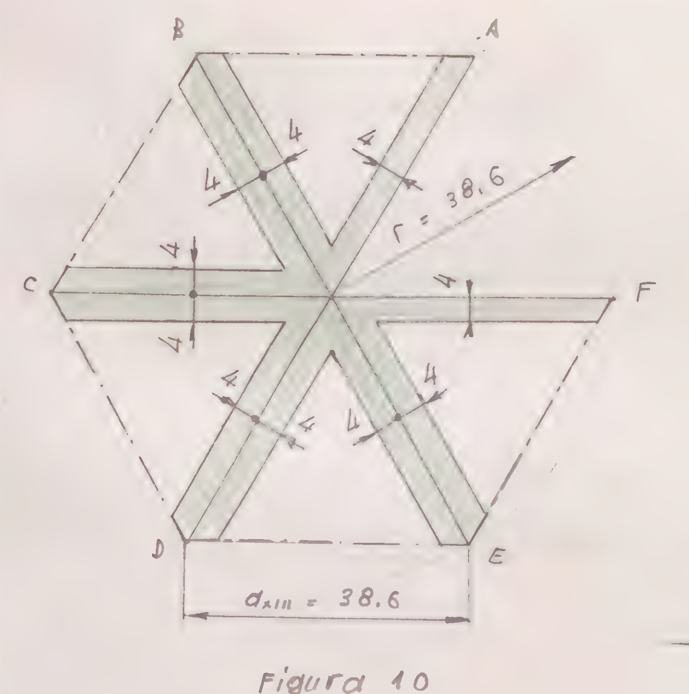


Figura 10

PIEZA Nº 10

12 (u)

Figura 10

PIEZA Nº 11 UNIONES ARISTAS 60 unidades

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 11

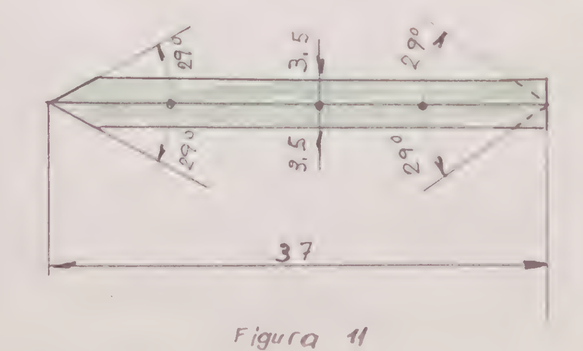


Figura 11

PIEZA Nº 11 60 (u)

Figura 11

MODELO M - 45.7 Patrones

	MODELOS CORPÓREOS	Modelo M-45.8

VARIANTE DEL MODELO CORPÓREO M-45.7, CONSISTENTE EN ADICIONAR AL MISMO, VEINTE PIRÁMIDES RECTAS EXAGONALES, REGULARES, DE CARAS VACIADAS, QUE TENGAN POR BASES LAS CARAS EXAGONALES DEL ARQUIMEDIANO XIII GENERADO, Y POR VÉRTICES LAS PROYECCIONES, SOBRE LA ESFERA CIRCUNSCRITA AL ICOSAEDRO GENERADOR, DE LOS CENTROS DE LAS CARAS EXAGONALES, DESDE EL CENTRO DEL POLIEDRO GENERADOR.

Radio de la esfera circunscrita:

$$r_{ec}^{20} = 110 \text{ mm}$$

ENUNCIADO: Construir el modelo corpóreo obtenido al adicionar al modelo M-45.7, veinte pirámides rectas exagonales, regulares, de caras vaciadas, que tengan por bases las caras exagonales del Arquimediano XIII generado, y por vértices las proyecciones, sobre la esfera circunscrita al icosaedro generador, de los centros de las caras exagonales, desde el centro "O" del poliedro generador.

Como se deduce de este enunciado, ha de construirse previamente un modelo igual al M-45.7, al cual ha de añadirse veinte pirámides rectas exagonales, regulares y de caras vaciadas, cuyo desarrollo y dimensiones estudiamos a continuación.

La altura "h_6" de dichas pirámides, se obtiene como diferencia del radio "r_{ec}^{20}" de la esfera circunscrita al icosaedro regular convexo generador, y del radio "r_{ei}^{XIII-6}" de la esfera tangente a las caras exagonales del Arquimediano generado. Así pues, tendremos:

$$h_6 = r_{ec}^{20} - r_{ei}^{XIII-6} \qquad (1)$$

UNE A4 210 x 297

$$a_{20} = 2\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}} \times r_{oc}^{20} = \underline{115,66}$$

$$a_{XIII} = \frac{1}{3}\, a_{20} = \underline{38,55}$$

$$r_{oi}^{XIII-6} = \frac{3\sqrt{3} + \sqrt{15}}{4} \times a_{XIII} = \underline{87,41}$$

$$h_6 = r_{oc}^{20} - r_{oi}^{XIII-6} = 110 - 87,41 = \underline{22,59}$$

$$a_6 = \sqrt{h_6^2 + r_{c-6}} = \sqrt{22,59^2 + 38,55^2} = \underline{44,68}$$

6 7 6 x 2

10 x 6 2

		Modelo M-45.8

El radio "r_{ec}^{20}", se obtuvo en el ejercicio G.E. nº.....- .- Lámina 5, en función de la arista "a_{20}" del icosaedro regular.- Su valor es:

$$r_{ec}^{20} = \frac{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{4} a_{20} \qquad (2)$$

El radio "r_{ei}^{XIII-6}" de la esfera tangente a las caras exagonales del Arquimediano $\underline{XIII}$, se obtuvo en el ejercicio G.E. nº.....- Lámina 45.- Su valor, en función de la arista "a_{XIII}" de dicho Arquimediano, es:

$$r_{ei}^{XIII-6} = \frac{3\sqrt{3} + \sqrt{15}}{4} a_{XIII} \qquad (3)$$

y sustituyendo a_{XIII} por su valor "$a_{XIII} = \frac{1}{3} a_{20}$" (ver fórmulas (1) y (3) del ejercicio M-45.7, tendremos:

$$r_{ei}^{XIII-6} = \frac{3\sqrt{3} + \sqrt{15}}{4} \times \frac{1}{3} a_{20} = \frac{3\sqrt{3} + \sqrt{15}}{12} a_{20} \qquad (4)$$

Sustituyendo en (1) los valores (2) y (4), tendremos:

$$h_6 = r_{ec}^{20} - r_{ei}^{XIII-6} = \frac{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{4} a_{20} - \frac{3\sqrt{3} + \sqrt{15}}{12} a_{20} =$$

$$= \left[\frac{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{4} - \frac{3\sqrt{3} + \sqrt{15}}{12} \right] a_{20} \qquad (5)$$

Sustituyendo en (5) el valor de "$a_{20} = 2\sqrt{\frac{5 - \sqrt{5}}{10}}\, r_{ec}^{20}$", en

UNE A4 210 x 297

función del radio "r_{ec}^{20}" de la esfera circunscrita al icosaedro generador (ver fórmula (1) del modelo M-45.7), tendremos:

$$\boxed{h_6} = \left[\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4} - \frac{3\sqrt{3}+\sqrt{15}}{12}\right] d_{20} = \left[\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4} - \frac{3\sqrt{3}+\sqrt{15}}{12}\right] \times 2\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}\, r_{ec}^{20} =$$

$$= \left[\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4} \times 2\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}} - \frac{3\sqrt{3}+\sqrt{15}}{12} \times 2\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}\right] r_{ec}^{20} =$$

$$= \left[\frac{\sqrt{2(5+\sqrt{5})} \times \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}}{2} - \frac{(3\sqrt{3}+\sqrt{15}) \times \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}}{6}\right] r_{ec}^{20} =$$

$$= \left[\frac{\sqrt{\frac{2(5+\sqrt{5})(5-\sqrt{5})}{10}}}{2} - \frac{\sqrt{\frac{(5-\sqrt{5})(3\sqrt{3}+\sqrt{15})^2}{10}}}{6}\right] r_{ec}^{20} =$$

$$= \left[\frac{\sqrt{\frac{2\times 20}{10}}}{2} - \frac{\sqrt{\frac{(5-\sqrt{5})(27+15+6\sqrt{45})}{10}}}{6}\right] r_{ec}^{20} =$$

$$= \left[1 - \sqrt{\frac{(5-\sqrt{5})(42+6\times 3\sqrt{5})}{10\times 6^2}}\right] r_{ec}^{20} = \left(1 - \sqrt{\frac{(5-\sqrt{5})(7+3\sqrt{5})}{10\times 6}}\right) r_{ec}^{20} =$$

$$= \left(1 - \sqrt{\frac{35+15\sqrt{5}-7\sqrt{5}-15}{60}}\right) r_{ec}^{20} = \left(1 - \sqrt{\frac{20+8\sqrt{5}}{60}}\right) r_{ec}^{20} =$$

$$= \boxed{\left(1 - \sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{15}}\right) r_{ec}^{20}} \qquad (6)$$

UNE A4 210 x 297

Para obtener la longitud de la arista "a_6" de las pirámides exagonales, rectas, regulares, tendremos en cuenta que "a_6" es la hipotenusa de un triangulo rectángulo, uno de cuyos catetos "h_6", y el otro el radio "r_{c-6}" de la circunferencia circunscrita a la cara exagonal del exquimediano $\underline{XIII}$. Así pues, será:

$$a_6 = \sqrt{(h_6)^2 + (r_{c-6})^2}. \qquad (7)$$

El radio "r_{c-6}" de la circunferencia circunscrita al exágono de lado "l_6", es:

$$\boxed{r_{c-6} = l_6} \qquad (8)$$

En la fórmula (8), aplicada a este estudio, es "$l_6 = a_{XIII}$" siendo a su vez "$a_{XIII} = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}\, r_{ec}^{20}$" (ver fórmula (3) del ejercicio M-45.7, y también $a_{20} = 2\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}\, r_{ec}^{20}$ (ver fórmula (1) del ejercicio M-45.7; Por consiguiente, tendremos:

$$\boxed{l_6} = \boxed{a_{XIII}} = \boxed{\frac{2}{3}\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}\, r_{ec}^{20}} \qquad (9)$$

y teniendo en cuenta (8), será a su vez

$$\boxed{r_{c-6}} = \boxed{\frac{2}{3}\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}\, r_{ec}^{20}} \qquad (10)$$

Sustituyendo los valores (6) y (10) en la fórmula (7), tendremos finalmente:

UNE A4 210 x 297

$$\boxed{a_6} = \sqrt{(h_c)^2 + (r_{c-6})^2} = \sqrt{\left[\left(1 - \sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{15}}\right) r_{ec}^{20}\right]^2 + \left[\left(\frac{2}{3}\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}\right) r_{ec}^{20}\right]^2} =$$

$$= \sqrt{\left(1 - \sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{15}}\right)^2 + \frac{4}{9}\left(\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}\right)^2}\; r_{ec}^{20} = \sqrt{1 + \frac{5+2\sqrt{5}}{15} - 2\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{15}} +}$$

$$\overline{+ \frac{4}{9} \times \frac{5-\sqrt{5}}{10}}\; r_{ec}^{20} = \sqrt{\frac{20+2\sqrt{5}}{15} - 2\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{15}} + \frac{4(5-\sqrt{5})}{90}}\; r_{ec}^{20} =$$

$$= \sqrt{\frac{120+12\sqrt{5}}{90} + \frac{20-4\sqrt{5}}{90} - 2\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{15}}}\; r_{ec}^{20} =$$

$$= \sqrt{\frac{120+12\sqrt{5}+20-4\sqrt{5}}{90} - 2\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{15}}}\; r_{ec}^{20} =$$

$$= \sqrt{\frac{140+8\sqrt{5}}{90} - 2\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{15}}}\; r_{ec}^{20} = \boxed{\sqrt{\frac{70+4\sqrt{5}}{45} - 2\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{15}}}\; r_{ec}^{20}} \quad (11)$$

Las fórmulas (9) y (11) nos permiten calcular los elementos necesarios para el desarrollo lateral de las pirámides escagonales, regulares, rectas, que se adicionan al modelo M-45.7, para obtener el que se estúdia.

Para este caso particular en el que $r_{ec}^{20} = 110$ mm, será:

$$\boxed{a_{XIII}} = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}} \times 110 \cong 0{,}35\,04\,87\,40\,8\ldots \times 110 = \boxed{38{,}6 \text{ mm}}$$

$$\boxed{a_6} = \sqrt{\frac{70+4\sqrt{5}}{45} - 2\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{15}}} \times 110 \cong 0{,}40\,62\,12\,08\,5\ldots \times 110 = \boxed{44{,}7 \text{ mm}}$$

UNE A4 210 x 297

Tavares Mayo 1981

Modelo M - 45.8

Para la construcción de este modelo, se precisan las siguientes piezas:

A) MODELO CORPÓREO DEL ARQUIMEDIANO XIII, OBTENIDO POR TRUNCADURA DE VÉRTICES DE UN ICOSAEDRO REGULAR CONVEXO A LA DISTANCIA "$x = \frac{1}{3} a_{20}$"

Piezas 1 al 11, iguales a las del modelo M- 45.7

B), PIRÁMIDES RECTAS, EXAGONALES, REGULARES, DE CARAS VACIADAS, QUE SE ADICIONAN AL MODELO, M- 45.7.

PIEZA Nº 12 DESARROLLO LATERAL DE LAS PIRÁMIDES ADICIONADAS 20 unidades

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 12

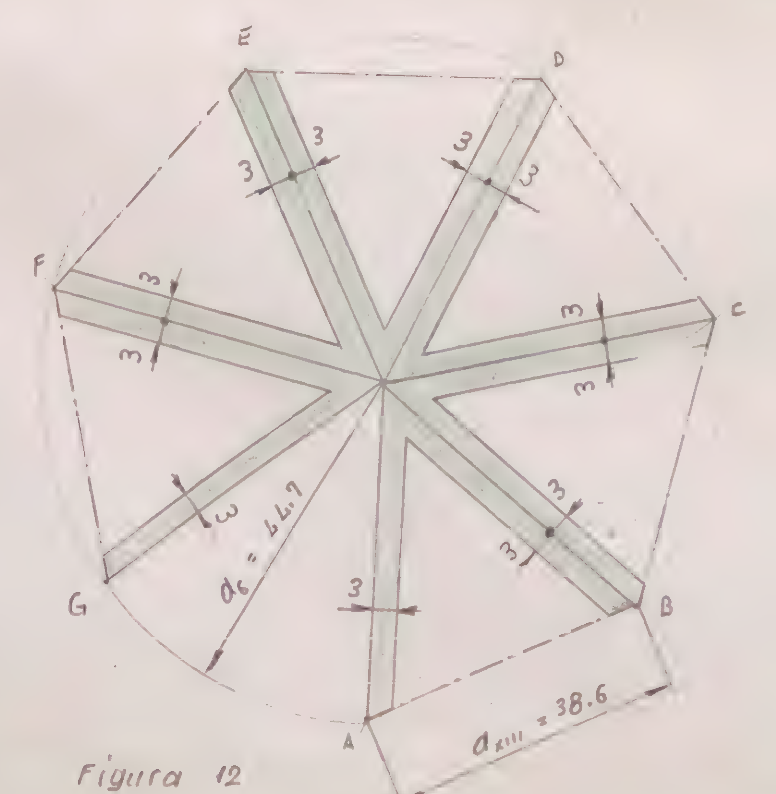


Figura 12

$\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = \overline{DE} = \overline{EF} = \overline{FG} = 38.6$ mm

PIEZA Nº 12

20 (u)

Figura 12

Tabarez Mayo 1981

Modelo M-35.8

PIEZA Nº 13 — UNIONES ARISTAS — 120 unidades

La forma y dimensiones se detallan en la figura 13

2.5 25° 63° 2.5 25° 63° 44

Figura 13

PIEZA Nº 13 120 (u)

Figura 13

Marzo 1981

UNE A4 210 x 297

MODELO M-45.8 Patrones

INTRODUCCIÓN A LOS MODELOS SOBRE POLIEDROS REGULARES CÓNCAVOS ESTRELLADOS

ESTUDIO PREVIO A LA CONSTRUCCIÓN DE LOS MODELOS DE LOS CUATRO POLIEDROS REGULARES CÓNCAVOS, ESTRELLADOS.- DEFINICIONES Y PROPIEDADES.

	Exposición de construcción de poliedros MODELOS CORPÓREOS	Modelo · M- 48.1

INTRODUCCIÓN A LOS MODELOS SOBRE POLIEDROS REGULARES CÓNCAVOS ESTRELLADOS.

ENUNCIADO: Estudio previo a la construcción de los modelos de los cuatro poliedros regulares cóncavos, estrellados. - Definiciones y propiedades.

1) POLIEDROS CÓNCAVOS EN GENERAL

1.1 .- DEFINICIONES

Recibe el nombre de poliedro a todo cuerpo geométrico limitado por un conjunto finito de polígonos planos tales que cada uno de los lados pertenezcan simultáneamente a dos de dichos polígonos, y que dos polígonos cualesquiera que tengan un lado común, estén en dos planos distintos.

Los polígonos del conjunto se llaman caras del poliedro; los lados y vértices de ellos se llaman respectivamente aristas y vértices del poliedro y los ángulos internos de los mismos, ángulos planos del poliedro.

Dos caras que tengan una arista común se lla-

man caras contiguas del poliedro. Los planos de dos caras contiguas forman un ángulo diedro que recibe el nombre de diedro del poliedro.

En cada vértice de un poliedro se forma un ángulo sólido cuyas aristas son las del poliedro que concurren en ese vértice, y cuyas caras son los ángulos planos que tienen un vértice común, el cual recibe el nombre de ángulo sólido del poliedro.

Se denominan diagonales de un poliedro a los segmentos rectilíneos que unen dos vértices no situados en una misma cara. Plano diagonal de un poliedro es el determinado por un vértice y una arista no pertenecientes a una misma cara, o también por dos aristas que no están en la misma cara.

Los polígonos planos que limitan un poliedro constituyen el contorno del mismo, y la superficie de ellos forman la superficie del poliedro. Siendo el contorno de un polígono una línea cerrada, el de un poliedro es a su vez una superficie poliédrica finita y cerrada.

Si prolongamos todas las caras de un poliedro, y se verifica que cada cara deja al poliedro en un mismo semi-espacio, el poliedro se denomina convexo

Si al prolongar todas las caras de un poliedro, hay al menos una de ellas que corta al poliedro, y

deja por lo tanto a una parte del mismo en distinto semi-espacio, el poliedro se denomina cóncavo

1.2 GÉNERO Y ESPECIE DE LOS POLIEDROS CÓNCAVOS Y CONVEXOS

Se ha definido el género de un polígono cualquiera como el número de sus lados. Análogamente llamaremos género de un poliedro al número de sus caras.

Proyectando la superficie de un poliedro desde un punto interior convenientemente elegido, para que los rayos proyectantes atraviesen la superficie igual número de veces en todos sentidos, este número se llama especie del poliedro.

Los poliedros convexos son todos de primera especie; los cóncavos, de especie superior

1.2 POLIEDROS REGULARES CÓNCAVOS O ESTRELLADOS

Un poliedro se dice que es regular si tiene todas sus caras iguales en forma de polígonos regulares convexos o estrellados (cóncavos), y si sus ángulos diedros son todos iguales.

Los poliedros regulares estrellados son todos cóncavos y por consiguiente de especie superior a la primera.

Solo escisten cuatro géneros de poliedros estrellados con-

cavos cuyas caras son polígonos regulares convexos o estrellados del mismo número de lados y en sus vértices y ángulos sólidos concurren el mismo número de aristas.

Estos cuatro poliedros regulares estrellados y cóncavos, son los siguientes

1) DODECAEDRO REGULAR ESTRELLADO DE SÉPTIMA ESPECIE, FORMADO POR DOCE CARAS PENTAGONALES ESTRELLADAS DE SEGUNDA ESPECIE Y VEINTE VÉRTICES TRIEDROS.- Modelo M-48.1

2) DODECAEDRO REGULAR ESTRELLADO DE TERCERA ESPECIE, FORMADO POR DOCE CARAS PENTAGONALES ESTRELLADAS DE SEGUNDA ESPECIE, Y DOCE VÉRTICES PENTAÉDRICOS.- Modelo M-49.1

3) DODECAEDRO REGULAR ESTRELLADO DE TERCERA ESPECIE, FORMADO POR DOCE PENTÁGONOS REGULARES CONVEXOS Y DOCE VÉRTICES PENTAÉDRICOS DE SEGUNDA ESPECIE.- Modelo M-50.1

4) ICOSAEDRO REGULAR ESTRELLADO DE SÉPTIMA ESPECIE, FORMADO POR VEINTE TRIÁNGULOS EQUILÁTEROS Y DOCE VÉRTICES PENTAEDRICOS DE SEGUNDA ESPECIE.- Modelo M-51.1

UNE A4 210 x 297

Mayo 1980

1.4 POLIEDROS REGULARES ESTRELLADOS CÓNCAVOS.- PROPIEDADES

Entre las numerosas propiedades de estos poliedros, destacamos las siguientes:

1.41 Todas las n caras (n = 12 ó 20) de un poliedro regular estrellado son iguales y tienen la forma de polígonos regulares convexos o estrellados, de lado igual a la arista ($l = a_n$) del mismo. Los polígonos de sus caras sólo pueden ser triángulos equiláteros (Modelo M-51.1); pentágonos regulares convexos (Modelo M-50.1); o pentágonos regulares estrellados de segunda especie (Modelos M-48.1 y M-49.1).

1.42 Las aristas de todo poliedro regular estrellado, son todas de igual longitud

1.43 Los ángulos sólidos de todo poliedro regular estrellado, son todos iguales, estando formados por tres o cinco caras; tres o cinco aristas; y un sólo vértice.

1.44 Los diedros que forman dos caras consecutivas de todo poliedro regular estrellado, son todos de igual amplitud.

UNE A4 210 x 297

Álvarez Mayo 1980

1.45 Todo poliedro regular estrellado, tiene un centro $\underline{O}$

1.46 Los vértices de un poliedro regular estrellado, equidistan de su centro $\underline{O}$.

1.47 En todo poliedro regular estrellado, existe una esfera de radio "$\underline{r_{ec}^{n}}$" y centro $\underline{O}$, que pasa por sus vértices. Dicha esfera se denomina <u>esfera circunscrita</u>

1.48 Los centros de los polígonos regulares que forman las caras de todo poliedro regular estrellado, equidistan del centro $\underline{O}$ de éste

1.49 En todo poliedro regular estrellado existe una esfera de radio "$\underline{r_{ei}^{n}}$" y centro $\underline{O}$, que pasa por los centros de los polígonos regulares que forman sus caras. Dicha esfera se denomina <u>esfera inscrita</u>.

1.50 Los puntos medios de las aristas $\underline{a_n}$ de todo poliedro regular estrellado, equidistan del centro $\underline{O}$ de éste.

1.51 En todo poliedro regular estrellado, existe una

Modelo M-68.1

esfera de radio "r_{et}^{n}" y centro O, que pasa por los puntos medios de sus aristas. Dicha esfera se denomina <u>esfera tangente a las aristas</u>

UNE A4 210 x 297

Alvarez Mayo 1980

EJECUTADO

MODELO CORPÓREO DEL DODECAEDRO REGULAR ESTRELLADO, CÓNCAVO, DE CARAS MACIZAS, DE SÉPTIMA ESPECIE, FORMADO POR DOCE CARAS PENTAGONALES ESTRELLADAS Y VEINTE VÉRTICES DE ÁNGULOS TRIEDROS, CONCURRENTES EN CADA UNO DE ÉSTOS TRES CARAS DEL MISMO.

Radio de la esfera que pasa por los vértices:

$r' = 110$ mm

UNE A 4-210 x 297

	Ejercicios de construcción de poliedros MODELOS CORPÓREOS	Modelo M - 48.1

ENUNCIADO: Construir el modelo corpóreo del dodecaedro regular estrellado, cóncavo, de caras macizas; de séptima especie, formado por doce caras pentagonales estrelladas y veinte vértices de ángulos triedros, concurrentes en cada uno de éstos, tres caras del mismo.

Este dodecaedro regular estrellado, puede obtenerse de los poliedros regulares convexos, en las dos formas diferentes que enunciamos a continuación:

A) Del dodecaedro regular convexo, uniendo sus vértices convenientemente.

B) Del icosaedro regular convexo, prolongando sus aristas convenientemente.

Estudiamos sucesivamente cada forma de obtención.

A 1) Obtención del dodecaedro regular estrellado por unión de los vértices de un dodecaedro regular convexo.

Supongamos un dodecaedro regular convexo, que llamaremos "generador" de arista "a_{12}", y unamos cada uno de sus vértices con los tres extremos de las aristas concurren-

Modelo M - 48.1

tes en el vértice diametralmente opuesto. Estas rectas, limitadas por los vértices serán pues "diagonales" del dodecaedro generador. Por cada uno de los veinte vértices del dodecaedro generador pasarán tres diagonales, formándose un total de $\frac{20 \times 3}{2} = 30$ diagonales distintas.

A su vez estas diagonales, al cortarse mutuamente, formarán doce pentágonos regulares estrellados, de segunda especie, que serán las caras del poliedro estrellado pedido. Las diagonales mencionadas serán pues "aristas" del poliedro estrellado, y en cada vértice del dodecaedro generador, concurrirán tres caras de dicho poliedro estrellado, que formarán veinte pirámides triangulares rectas, cuyas caras laterales son triángulos isósceles.

Las caras laterales de las mencionadas pirámides triangulares rectas forman en su totalidad la superficie aparente del poliedro estrellado estudiado.

ESTUDIO GEOMÉTRICO-ANALÍTICO DE UNA CARA DEL DODECAEDRO REGULAR ESTRELLADO

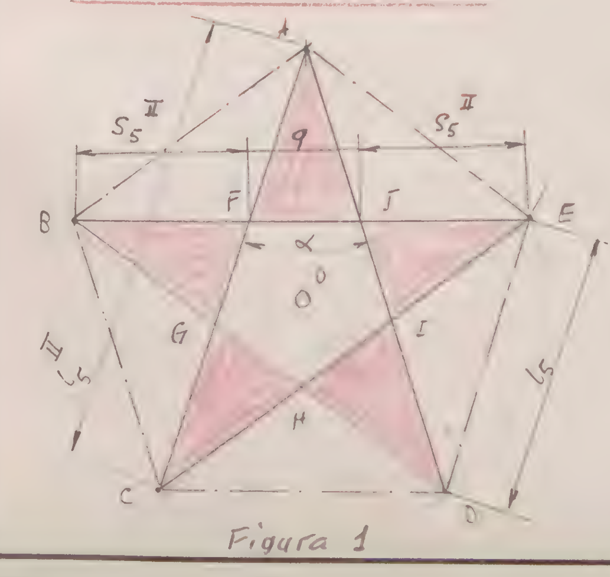


Figura 1

Tiene la forma de un pentágono regular estrellado (ver fig. 1) ABCDEA de segunda especie.

El lado "l_5" del pentágono regular convexo generador, es igual a la diagonal del pen-

tágono regular convexo de una cara del dodecaedro generador de arista "a_{12}".

Calculemos a continuación las magnitudes lineales y angulares del pentágono estrellado de una cara del poliedro pedido, en función del radio r_{ec}^{12} de la esfera circunscrita al mismo, dato único del ejercicio.

a) En el estudio del dodecaedro regular convexo (G. E. nº, lám. 4) obtuvimos la fórmula

$$r_{ec}^{12} = \frac{\sqrt{15} + \sqrt{3}}{4} a_{12}$$

que nos da el radio r_{ec}^{12} de la esfera circunscrita en función de su arista. Despejando en ella a_{12}, tendremos:

$$\boxed{a_{12}} = r_{ec}^{12} : \frac{\sqrt{15} + \sqrt{3}}{4} = \frac{4}{\sqrt{15} + \sqrt{3}} r_{ec}^{12} = \frac{4(\sqrt{15} - \sqrt{3})}{12} r_{ec}^{12} =$$

$$= \boxed{\frac{\sqrt{15} - \sqrt{3}}{3} r_{ec}^{12}}$$ De donde se obtiene finalmente:

$$\boxed{a_{12} = \frac{\sqrt{15} - \sqrt{3}}{3} r_{ec}^{12}} \qquad (1)$$

b) El lado "l_5" del pentágono regular convexo generador de la cara del poliedro estudiado, es (fig. 1) la diagonal "d_5" del pentágono regular convexo de una cara del dodecaedro regular convexo generador. Su valor, en función de "l_5", se deduce de la fórmula (c)

$$d_5 = \frac{\sqrt{5} + 1}{2} l_5$$

UNE A 4-210 x 297

[signature] Diciembre 1979

que obtuvimos en el ejercicio G.P. 1.400 - 44, por lo que siendo, en este caso particular $l_5 = a_{12}$. tendremos

$$l_5 = \overline{DE} = d_5 = \frac{\sqrt{5}+1}{2}\, a_{12}$$

en la que sustituiremos a_{12} por su valor (1), por lo que será:

$$\boxed{l_5} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}\, a_{12} = \frac{\sqrt{5}+1}{2} \cdot \frac{\sqrt{15}-\sqrt{3}}{3}\, r_{ec}^{12} = \frac{(\sqrt{5}+1)(\sqrt{15}-\sqrt{3})}{6}\, r_{ec}^{12} =$$

$$= \frac{\sqrt{75}-\sqrt{15}+\sqrt{15}-\sqrt{3}}{6}\, r_{ec}^{12} = \frac{5\sqrt{3}-\sqrt{3}}{6}\, r_{ec}^{12} = \frac{4\sqrt{3}}{6}\, r_{ec}^{12} = \boxed{\frac{2\sqrt{3}}{3}\, r_{ec}^{12}}$$

De donde se obtiene finalmente:

$$\boxed{l_5 = \frac{2\sqrt{3}}{3}\, r_{ec}^{12}} \qquad (2)$$

c) La arista de la cara lateral de la pirámide triangular del poliedro estudiado, es igual al segmento $BF = JE = S_5^{II}$, en la figura 1.

Su valor se deduce de la fórmula

$$S_5^{II} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}\, l_5$$

obtenida en el ejercicio G.P. 1.400-62 (4) en la que sustituiremos l_5 por su valor (2), por lo que será:

$$\boxed{S_5^{II}} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}\, l_5 = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \cdot \frac{2\sqrt{3}}{3}\, r_{ec}^{12} = \frac{2\sqrt{15}-2\sqrt{3}}{6}\, r_{ec}^{12} =$$

$$= \frac{2(\sqrt{3}\,\sqrt{5}-\sqrt{3})}{6}\, r_{ec} = \frac{\sqrt{3}\,(\sqrt{5}-1)}{3}\, r_{ec} = \boxed{\frac{\sqrt{15}-\sqrt{3}}{3}\, r_{ec}^{12}}$$ de donde se

		Modelo M-48.1

obtiene finalmente:

$$s_5^{II} = \frac{\sqrt{15} - \sqrt{3}}{3} r_{ec}^{12} = a_{12} \quad \text{ver fórmula (1).} \qquad (3)$$

d) La arista de la base de la pirámide triangular del poliedro estudiado, es igual al segmento $\overline{FJ} = q$ en la figura 1. Su valor se deduce de la fórmula

$$q = \frac{3 - \sqrt{5}}{2} l_5$$

obtenida en el ejercicio G.P. 1.400-62 (5), en la que sustituiremos "l_5" por su valor (2), por lo que será:

$$q = \frac{3 - \sqrt{5}}{2} l_5 = \frac{3 - \sqrt{5}}{2} \times \frac{2\sqrt{3}}{3} r_{ec}^{12} = \frac{6\sqrt{3} - 2\sqrt{15}}{6} r_{ec}^{12} =$$

$$= \frac{3\sqrt{3} - \sqrt{15}}{3} r_{ec}^{12}$$ de donde se obtiene finalmente:

$$q = \frac{3\sqrt{3} - \sqrt{15}}{3} r_{ec}^{12} \qquad (4)$$

e) La longitud de la arista de la cara pentagonal regular estrellada del poliedro estudiado, es igual al segmento $\overline{AC} = l_5^{II}$ en la figura 1. Su valor se deduce de la fórmula

$$d_5 = \frac{\sqrt{5} + 1}{2} l_5$$

que obtuvimos en el ejercicio G.P. 1.400-44 (6), y siendo en este caso particular $l_5 = \frac{2\sqrt{3}}{3} r_{ec}^{12}$ (ver fórm. (2)), tendremos:

$$l_5^{II} = d_5 = \frac{\sqrt{5}+1}{2} l_5 = \frac{\sqrt{5}+1}{2} \times \frac{2\sqrt{3}}{3} r_{ec}^{12} = \frac{2\sqrt{15}+2\sqrt{3}}{6} r_{ec}^{12} =$$

$= \frac{\sqrt{15}+\sqrt{3}}{3} r_{ec}^{12}$ de donde se obtiene finalmente

$$l_5^{II} = \frac{\sqrt{15}+\sqrt{3}}{3} r_{ec}^{12} \qquad (5)$$

f) El ángulo $\widehat{CAD} = \alpha$ (fig. 1) de la cara poligonal estrellada del poliedro estudiado, tendrá una amplitud de

$$\alpha = \frac{360}{5} : 2 = 36^{\circ} \qquad (6)$$

por lo que "El segmento "q" es el lado de un decágono regular inscrito en la circunferencia de radio S_5^{II}

A2) Obtención del dodecaedro regular estrellado por prolongación de las aristas de un icosaedro regular convexo.

En efecto, los segmentos "q" (fig. 1) de las doce caras estrelladas del poliedro estudiado, forman en cada una de ellas un pentágono regular convexo, y el conjunto de todas, forman un icosaedro regular de arista $a_{20} = q$, que podemos denominar "núcleo" del dodecaedro regular estrellado estudiado en este ejercicio

Así pues, prolongando las cinco aristas del icosaedro re-

gular convexo, correspondientes a la base de cada pirámide pentagonal regular que forman las cinco caras concurrentes en cada vértice del mencionado icosaedro regular convexo, se formarán pentágonos regulares estrellados, de segunda especie, análogos a los de la figura 1, que son a su vez caras de un poliedro regular estrellado igual al estudiado en este ejercicio.

La longitud de la arista a_{20} del icosaedro núcleo, será pues (ver fórmula (4))

$$a_{20} = q = \frac{3\sqrt{3} - \sqrt{15}}{3} r_{ec}^{12} \qquad (7)$$

Terminado el estudio analítico de este poliedro estrellado, procedamos a su construcción, siendo pues necesario las siguientes piezas:

PIEZA Nº 1 DESARROLLO DE LAS PIRÁMIDES TRIANGULARES RECTAS CUYAS CARAS LATERALES LIMITAN EL DODECAEDRO ESTRELLADO

20 unidades

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 1

La longitud del lado igual del triángulo isósceles, se obtiene de la fórmula (3)

$$s_5^{II} = a_{12} = \frac{\sqrt{15} - \sqrt{3}}{3} r_{ec}^{12} \cong 0{,}71\ 36\ 44\ 17\ 9.. \times 110 \cong 78{,}5 \text{ mm}$$

		Modelo M - 48,1

La longitud de la base del Triángulo anterior, se obtiene de la fórmula (4)

$$\boxed{a} = \frac{3\sqrt{3} - \sqrt{15}}{3}\, r_{ec}^{12} \cong 0.44\,10\,56\,\ldots \times 110 \cong \boxed{48{,}5 \ \text{mm}}$$

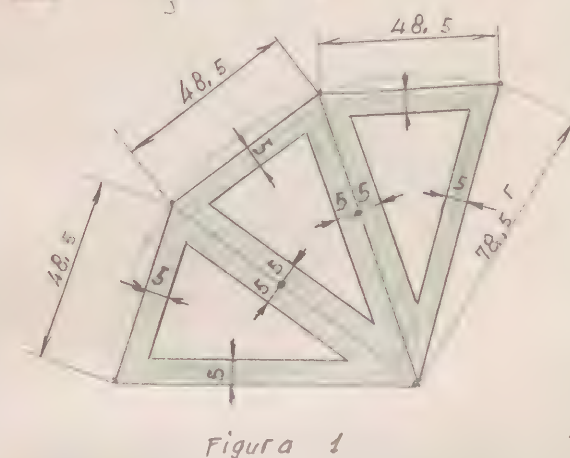


Figura 1

PIEZA Nº 1 .. 20 (u)

Figura 1

PIEZA Nº 2 . UNIONES ARISTAS (LATERALES) 60 unidades

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 2

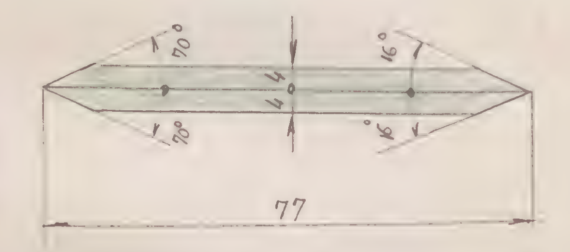


Figura 2

PIEZA Nº 2 60 (u)

Figura 2

PIEZA Nº 3 UNIONES ARISTAS (EN BASE) 30 unidades

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 3

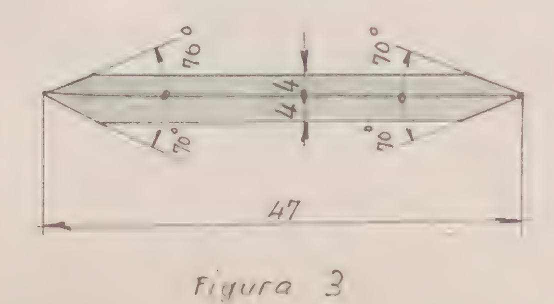


Figura 3

PIEZA Nº 3 30 (u)

Figura 3

UNE A 4-210 x 297

Alvarez Diciembre 1979

Modelo M - 48.1

PIEZA Nº 4 FORRO MACIZO DE LAS CARAS LATERALES

60 unidades

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 4

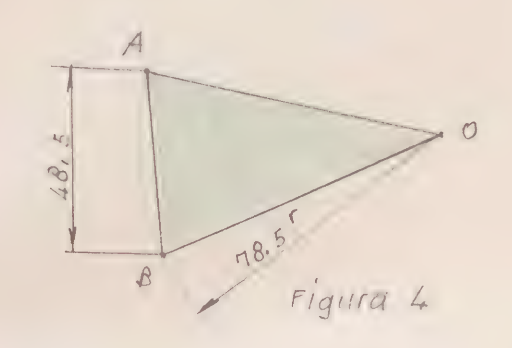


Figura 4

PIEZA Nº 4 60 (u)

Figura 4

PIEZA Nº 5 REFUERZO CARAS LATERALES 60 unidades

Su forma y dimensiones se representan en la figura 5, y se deducen de las del triángulo OAB de la figura 4

Figura 5

PIEZA Nº 5 60 (u)

Figura 5

PIEZA Nº 6 FORRO COLOREADO EN CARAS LATERALES

60 unidades

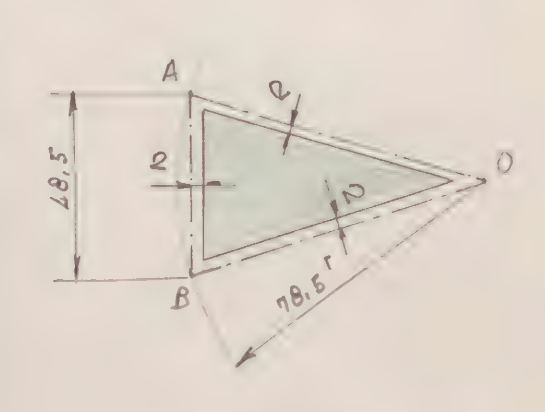


Figura 6

Su forma y dimensiones se representan en la figura 6, y se deducen de las del triángulo OAB de la figura 4

PIEZA Nº 6 60 (u)

Figura 6

Diciembre 1979

VARIANTE DEL MODELO CORPÓREO M-48.1

DE IGUAL FORMA Y MENOR RADIO DE LA

ESFERA CIRCUNSCRITA.

Radio de la esfera que pasa por los vértices exteriores:

$r' = 76{,}1$ mm

	Ejercicios de construcción de poliedros MODELOS CORPÓREOS	Modelo M-48.2

ENUNCIADO: Construir el modelo corpóreo del dodecaedro regular estrellado, concavo, de caras macizas, de séptima especie, formado por doce caras pentagonales estrelladas, y veinte vértices de ángulos triedros, concurrentes en cada uno de éstos, tres caras del mismo.

Este modelo puede considerarse como una variante del modelo M-48.1 de igual forma, y menor longitud en el radio "r_{ec}^{12E}" de su esfera circunscrita.

Para obtener el despiezo de este modelo, aplicaremos el estudio analítico hecho para el modelo M-48.1, determinando el coeficiente de reducción k = 76.1 : 110, o relación entre los radios correspondientes de sus respectivas esferas circunscritas.

DATO ÚNICO DEL EJERCICIO:

$$r_{ec}^{12E} = 76,1 \text{ m. m.}$$

Coeficiente de reducción:

$$k = \frac{76.1}{110} = 0,69\overline{18}\ldots$$

A continuación presentamos diversas tablas de las longitudes reseñadas en las figuras del modelo M-48.1, y de los valores

UNE A 4-210 x 297

		Modelo M - 48.2

correspondientes a aplicar en la construcción de este nuevo modelo M-48.2, en el que son necesarias las siguientes piezas:

PIEZA Nº 1 DESARROLLO DE LAS PIRÁMIDES TRIANGULARES RECTAS CUYAS CARAS LATERALES LIMITAN EL DODECAEDRO ESTUDIADO 20 unidades

La figura 1. ha de construirse con las siguientes cotas modificadas

FIGURA 1	Longitudes l en mm	Cotas modificadas m m
PIEZA Nº1	78,5	54,3
20 (u)	48,5	33,6
	5	4

PIEZA Nº 2 UNIONES ARISTAS (LATERALES) 60 unidades

La figura 2, ha de construirse con las siguientes cotas:

FIGURA 2	Longitudes m m	Cotas modificadas m m
PIEZA Nº2		
	77	53
60 (u)	4	3
	70°	70°
	16°	16°

UNE A 4-210 x 297

Tatiana Diciembre 1979

Modelo M - 48.2

PIEZA Nº 3 UNIONES ARISTAS (EN BASE) 30 unidades

La figura 3, ha de construirse con las siguientes cotas:

FIGURA 3	Longitudes mm	Cotas modificadas mm
PIEZA Nº 3	47	35
30 (u)	4	3
	70°	70°

PIEZA Nº 4 FORRO MACIZO DE LAS CARAS LATERALES

60 unidades

La figura 4, ha de construirse con las siguientes cotas:

FIGURA 4	Longitudes mm	Cotas modificadas mm
PIEZA Nº 4	78,5	54,3
60 (u)	48,5	33,6

PIEZA Nº 5 REFUERZO CARAS LATERALES 60 unidades

La figura nº 5, ha de construirse con las siguientes cotas:

FIGURA 5	Longitudes mm	Cotas modificadas mm
PIEZA Nº 5	78,5	54,3
60 (u)	48,5	33,6
	6,5	5,5

Diciembre 1979

Modelo M- 48.2

PIEZA Nº 6 FORRO COLOREADO EN CARAS LATERALES

60 unidades

La figura nº 6, ha de construirse con las siguientes cotas:

FIGURA 6	Longitudes mm	Cotas modificadas mm
PIEZA Nº 6	78, 5	54. 3
[illegible]	48, 5	33, 6
	2	2

Alvarez   Diciembre 1979

UNE A 4-210 x 297

	MODELOS CORPÓREOS	Modelo M - 48.3

VARIANTE DEL MODELO M - 48.1,

DE IGUAL FORMA Y DIMENSIONES,

SIENDO EL DODECAEDRO ESTRELLA-

DO DE CARAS VACIADAS, Y EL ICO-

SAEDRO REGULAR CONVEXO DEL NÚ-

CLEO, DE CARAS MACIZAS.

Radio de la esfera que pasa por los vértices:

r' = 110 mm

UNE A 4-210 x 297

ENUNCIADO: Construir el modelo corpóreo de la variante del modelo M-48.1, de igual forma y dimensiones, siendo el dodecaedro estrellado, de caras vaciadas y el icosaedro regular convexo del núcleo, de caras macizas.

Las dimensiones de los poliedros componentes de este modelo, son iguales a las del M-48.1, y siendo necesarios para su construcción las siguientes piezas:

A) DODECAEDRO REGULAR ESTRELLADO DE CARAS VACIADAS

PIEZA Nº 1 DESARROLLO DE LAS PIRÁMIDES TRIANGULARES RECTAS CUYAS CARAS LATERALES LIMITAN AL DODECAEDRO ESTRELLADO.

20 unidades

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 1

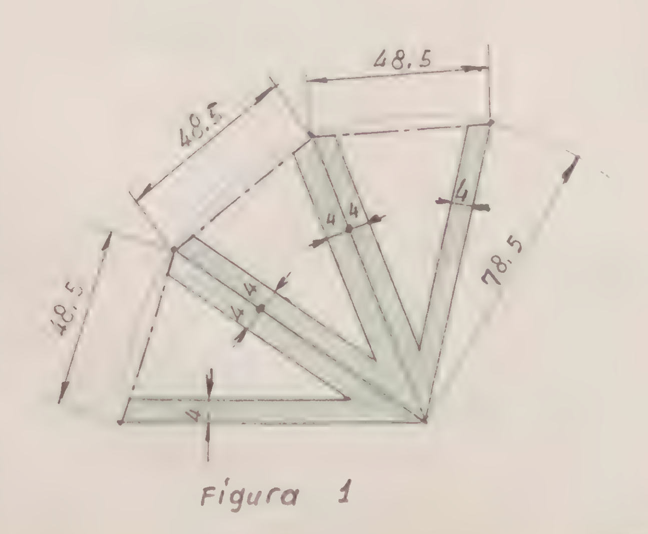


Figura 1

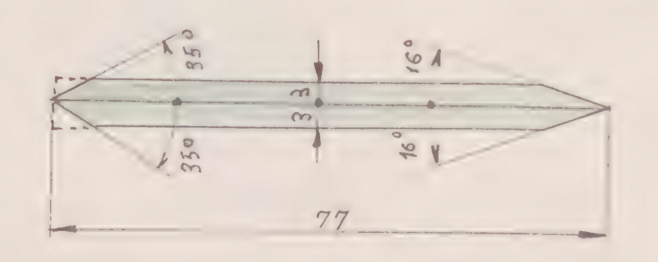
PIEZA Nº 1 20 (u)

Figura 1

Modelo M - 48.3

PIEZA Nº 2 UNIONES ARISTAS 60 unidades

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 2



PIEZA Nº 2 60 (u)

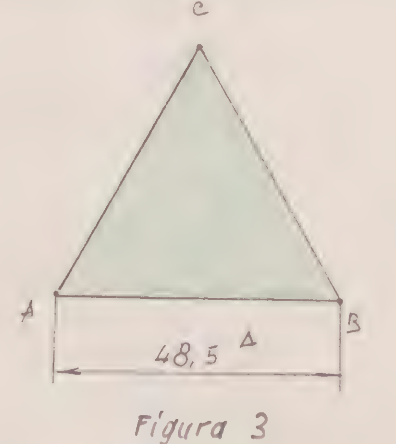
Figura 2

Figura 2

B) ICOSAEDRO REGULAR CONVEXO DEL NÚCLEO, CON SUS CARAS MACIZAS

PIEZA Nº 3 CARAS SUPERFICIALES 20 unidades

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 3



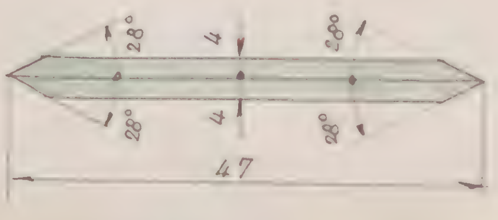
PIEZA Nº3 20 (u)

Figura 3

Figura 3

PIEZA Nº 4 UNIONES ARISTAS 30 unidades

Su forma y dimensiones en fig. 4



PIEZA Nº 4 30 (u)

Figura 4

Figura 4

Enero 1980

Modelo M - 48.3

PIEZA Nº 5 REFUERZO CARAS LATERALES 20 unidades

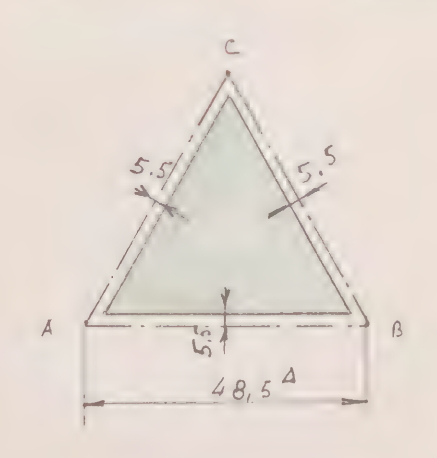


Figura 5

Su forma y dimensiones se representan en la figura 5 y se deducen de las del triángulo ABC. de la figura 3

PIEZA Nº 5 20 (u)

Figura 5

PIEZA Nº 6 FORRO COLOREADO EN CARAS LATERALES

20 unidades

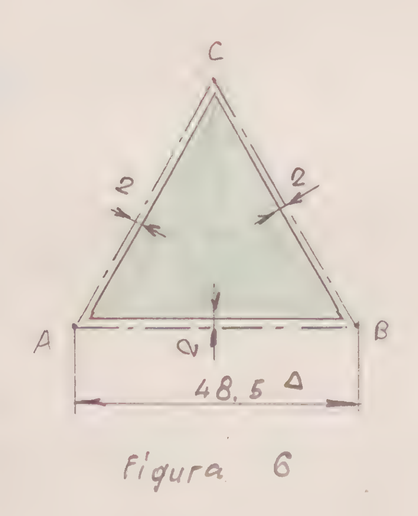
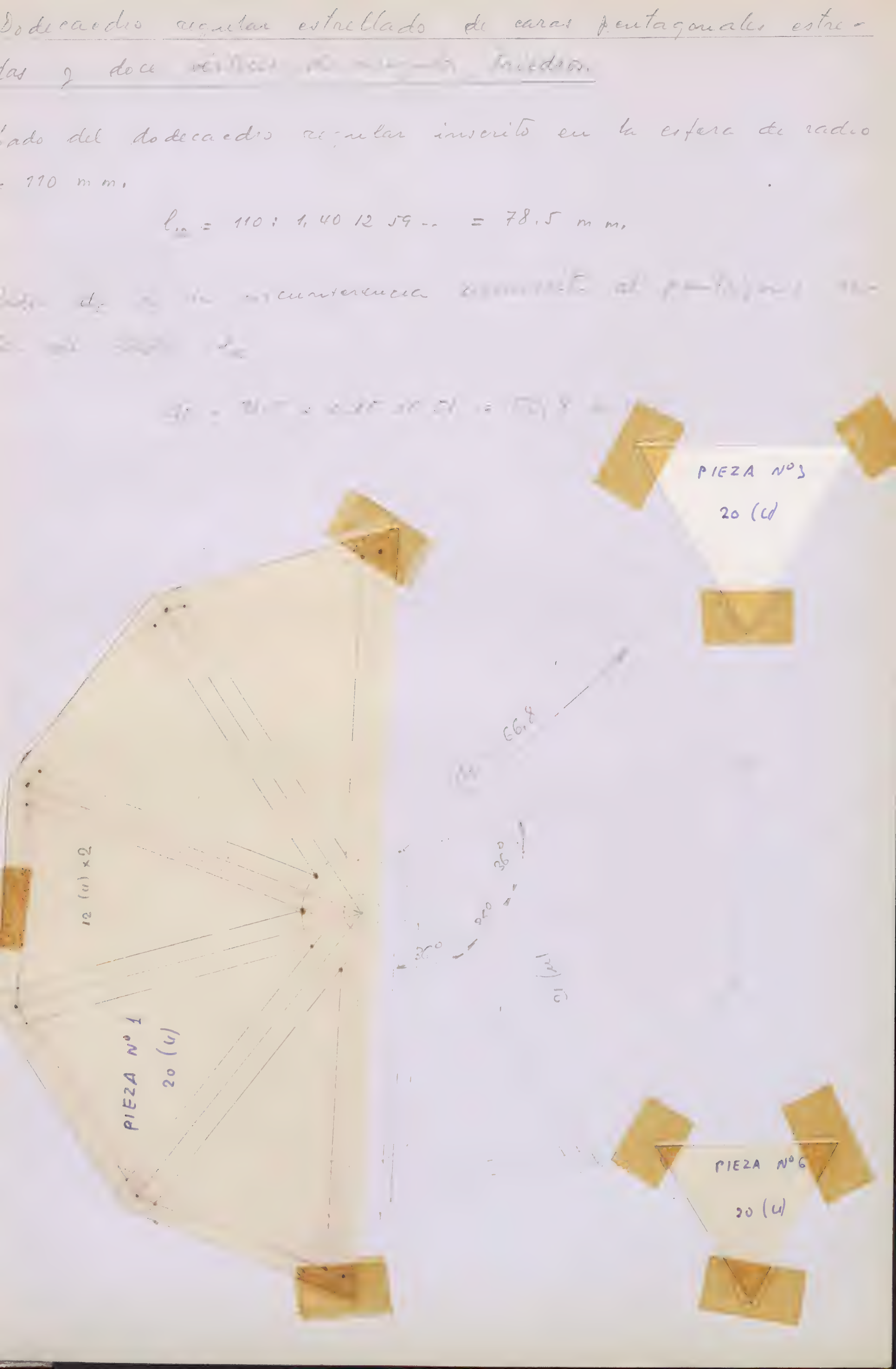


Figura 6

Su forma y dimensiones se representan en la figura 6 y se deducen de las del triángulo ABC de la figura 3

PIEZA Nº 6 20 (u)

Figura 6


Dodecaedro regular estrellado de caras pentagonales estre-
lladas y doce vértices
Lado del dodecaedro regular inscrito en la esfera de radio
= 110 mm.
l_{12} = 110 : 1,40 12 59 .. = 78.5 mm.
PIEZA Nº 3
20 (c)
66.8
36º
36º
12 (u) x 2
PIEZA Nº 1
20 (u)
PIEZA Nº 6
20 (u)

[illegible] cóncavo obtenido al construir sobre cada
un dodecaedro regular, una pirámide pentago
[illegible]

VARIANTE DEL MODELO CORPÓREO

M-48.3 DE IGUAL FORMA Y MENOR

RADIO DE LA ESFERA CIRCUNSCRITA.

Radio de la esfera que pasa por los vértices exteriores

r' = 76,1 mm

UNE A 4-210 x 297

	Ejercicios de construcción de poliedros MODELOS CORPÓREOS	Modelo M-48.4

ENUNCIADO: Construir el modelo corpóreo de la variante del modelo M-48.3, de igual forma y de menor tamaño, siendo el dodecaedro estrellado de caras vaciadas, y el icosaedro regular convexo del núcleo, de caras macizas.

Este modelo puede considerarse como una variante del modelo M-48.3, ya que es de igual forma, pero de menor longitud en el radio "r_{ec}^{12E}" de su esfera circunscrita.

Para obtener el despiezo del mismo, aplicaremos el estudio analítico hecho para el modelo M-48.1, determinando previamente el coeficiente de reducción $k = 76.1 : 110$, o relación entre los radios correspondientes de sus respectivas esferas circunscritas.

DATO ÚNICO DEL MODELO ESTUDIADO:

$$r_{ec}^{12E} = 76.1 \text{ mm}$$

Coeficiente de reducción:

$$k = \frac{76.1}{110} = 0,69\widehat{18}...$$

A continuación exponemos en diversas tablas, las longitudes reseñadas en las figuras del modelo 48.3, y de los valores corres-

pondientes a aplicar en la construcción de este nuevo modelo M-48.4, en el que son necesarias las siguientes piezas:

A) DODECAEDRO REGULAR ESTRELLADO DE CARAS VACIADAS

PIEZA Nº 1 DESARROLLO DE LAS PIRÁMIDES TRIANGULARES RECTAS, CUYAS CARAS LATERALES LIMITAN EL DODECAEDRO ESTUDIADO. 20 unidades

La figura 1, ha de construirse con las siguientes cotas modificadas.

Figura 1	Longitudes mm	Cotas modificadas mm
PIEZA Nº 1	78.5	54.3
20 (U)	48.5	33.6
	4	3

PIEZA Nº 2 UNIONES ARISTAS 60 unidades

La figura 2, ha de construirse con las siguientes cotas modificadas.

Figura 2	Longitudes mm	Cotas modificadas mm
PIEZA Nº 2	77	77
60 (U)	3	2.5
	70°	70°
	16°	16°

		Modelo M-48.4

B) ICOSAEDRO REGULAR CONVEXO, DEL NÚCLEO, CON SUS CARAS MACIZAS.

PIEZA Nº 3 CARAS SUPERFICIALES 20 unidades

La figura 3, ha de construirse con las siguientes cotas modificadas.

Figura 3	Longitudes mm	Cotas modificadas mm
PIEZA Nº 3 20 (u)	48,5 Δ	33,6 Δ

PIEZA Nº 4 UNIONES ARISTAS 30 unidades

La figura 4, ha de construirse con las siguientes cotas modificadas.

Figura 4	Longitudes mm	Cotas modificadas mm
PIEZA Nº 4 30 (u)	47 4 28°	32 3 28°

UNE A 4-210 x 297

[firma] Enero 1980

PIEZA Nº 5 REFUERZO CARAS LATERALES 20 unidades

La figura 5, ha de construirse con las siguientes cotas modificadas.

Figura 5	Longitudes mm	Cotas modificadas mm
PIEZA Nº 5	48.5 Δ	33,6 Δ
20 (u)	5.5	4

PIEZA Nº 6 FORRO COLOREADO EN CARAS LATERALES

20 unidades

La figura 6, ha de construirse con las siguientes cotas modificadas.

Figura 6	Longitudes mm	Cotas modificadas mm
PIEZA Nº 6	48,5 Δ	33.6 Δ
20 (u)	2	2

MODELO CORPÓREO DEL DODECAEDRO REGULAR ESTRELLADO, CÓNCAVO, DE CARAS MACIZAS, DE TERCERA ESPECIE, FORMADO POR DOCE CARAS PENTAGONALES ESTRELLADAS, Y DOCE VÉRTICES DE ÁNGULOS PENTAÉDRICOS, CONCURRIENDO EN CADA UNO DE DICHOS ÁNGULOS CINCO CARAS DEL MISMO.

Radio de la esfera que pasa por los vértices:

$r' = 110$ mm.

Ejercicios de construcción de poliedros MODELOS CORPÓREOS	Modelo M- 49.1

ENUNCIADO: Construir el modelo corpóreo del dodecaedro regular estrellado, cóncavo, de caras macizas, de tercera especie, formado por doce caras pentagonales estrelladas, y doce vértices de ángulos pentaédricos, concurriendo en cada uno de dichos ángulos, cinco caras del mismo.

Este dodecaedro regular estrellado, puede obtenerse de los poliedros regulares convexos, en las dos formas diferentes que a continuación enunciamos:

A) Del icosaedro regular convexo, uniendo sus vértices convenientemente.

B) Del dodecaedro regular convexo, prolongando sus aristas convenientemente.

Estudiamos a continuación sucesivamente cada forma de obtención.

A1) Obtención del dodecaedro regular estrellado, por unión de los vértices de un icosaedro regular convexo.

Supongamos un icosaedro regular convexo, que llamaremos "generador" de arista "a_{20}", y unamos cada uno de

sus vértices con los cinco extremos de las aristas concurrentes en el vértice diametralmente opuesto. Estas rectas, limitadas por los vértices, serán pues "diagonales" del dodecaedro generador. Por cada uno de los vértices de dicho dodecaedro generador, pasarán cinco diagonales, formándose un total de $\frac{12 \times 5}{2} = 30$ diagonales distintas.

A su vez estas diagonales, al cortarse mutuamente, formarán doce pentágonos regulares estrellados, planos, de segunda especie, que serán las caras del poliedro estrellado estudiado. Las diagonales mencionadas serán pues "aristas" del poliedro estrellado, y en cada vértice del icosaedro generador, concurrirán cinco caras de dicho poliedro estrellado, que formarán doce pirámides pentagonales rectas, cuyas caras laterales son triángulos isósceles.

Las caras laterales de las mencionadas pirámides pentagonales rectas, forman en su totalidad la superficie aparente del poliedro estrellado que estudiamos.

ESTUDIO GEOMÉTRICO-ANALÍTICO DE UNA CARA DEL DODECAEDRO REGULAR ESTRELLADO.

Tiene la forma de un pentágono regular estrellado, ABCDE, representado en la figura 1, de segunda especie, cuyo estudio realizamos en el ejercicio G.P. 1.400-44.

El lado "l_5" del pentágono regular convexo generador, es igual a la arista a_{20} del icosaedro regular convexo ge-

Figura 1

merador, siendo pues

$$l_5 = a_{20} \qquad (1)$$

Calculemos a continuación las magnitudes lineales y angulares del pentágono estrellado de una cara del poliedro pedido, en función del radio r_{ec}^{20} de la esfera circunscrita al mismo, dato único del ejercicio.

a) En el estudio del icosaedro regular convexo (E.E. nº , lámina 5) obtuvimos la fórmula

$$r_{ec}^{20} = \frac{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{4} \; a_{20}$$

que nos da el radio r_{ec}^{20} de la esfera circunscrita en función de su arista a_{20}. Despejando en ella a_{20}, tendremos:

$$\boxed{a_{20}} = r_{ec}^{20} : \frac{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{4} = \frac{4}{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}} \, r_{ec}^{20} = \frac{4\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{10 + 2\sqrt{5}} \, r_{ec}^{20} =$$

$$= \frac{2\sqrt{2(5 + \sqrt{5})}}{5 + \sqrt{5}} \, r_{ec}^{20} = \frac{2\sqrt{2(5 + \sqrt{5})} \times (5 - \sqrt{5})}{20} \, r_{ec}^{20} = \frac{\sqrt{2(5 + \sqrt{5})(5 - \sqrt{5})^2}}{10} \, r_{ec}^{20} =$$

$$= \frac{\sqrt{2 \times 20 \, (5 - \sqrt{5})}}{10} \, r_{ec}^{20} = \sqrt{\frac{40 \, (5 - \sqrt{5})}{100}} \, r_{ec}^{20} = \sqrt{\frac{4 \, (5 - \sqrt{5})}{10}} \, r_{ec}^{20} =$$

$$= \boxed{2\sqrt{\frac{5 - \sqrt{5}}{10}} \, r_{ec}^{20}}$$

De donde se obtiene finalmente, teniendo en cuenta el valor de (1) $[l_5 = a_{20}]$

		Modelo M- 49.1

$$\boxed{l_5} = a_{20} = \boxed{2\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}\; r_{ec}^{20}} \qquad (2)$$

b) La arista de la cara lateral de la pirámide pentagonal recta, del poliedro estudiado, es igual al segmento $\overline{BF} = \overline{JE} = S_5^{II}$, en la figura 1. Su valor se deduce de la fórmula

$$S_5^{II} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}\, l_5$$

obtenida en el ejercicio G.P. 1400-62 (4) en la que sustituiremos l_5 por su valor (2), por lo que será:

$$\boxed{S_5^{II}} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \times 2\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}\; r_{ec}^{20} = \sqrt{\frac{(5-\sqrt{5})\,(\sqrt{5}-1)^2}{10}}\; r_{ec}^{20} =$$

$$= \sqrt{\frac{(5-\sqrt{5})\,(5+1-2\sqrt{5})}{10}}\; r_{ec}^{20} = \sqrt{\frac{(5-\sqrt{5})\,(3-\sqrt{5})}{5}}\; r_{ec}^{20} = \sqrt{\frac{15-3\sqrt{5}-5\sqrt{5}+5}{5}}\; r_{ec}^{20}$$

$$= \sqrt{\frac{20-8\sqrt{5}}{5}}\; r_{ec}^{20} = \boxed{2\sqrt{\frac{5-2\sqrt{5}}{5}}\; r_{ec}^{20}}$$ De donde se obtiene finalmente

$$\boxed{S_5^{II} = 2\sqrt{\frac{5-2\sqrt{5}}{5}}\; r_{ec}^{20}} \qquad (3)$$

c) La arista de la base de la pirámide pentagonal recta del poliedro estudiado, es igual al segmento $\overline{FJ} = q$ en la figura 1. Su valor se deduce de la fórmula

$$q = \frac{3-\sqrt{5}}{2}\, l_5$$

obtenida en el ejercicio G.P. 1.400-62 (5), en la que sustituiremos "l_5" por su valor (2), por lo que será:

$$q = \frac{3-\sqrt{5}}{2} \times 2\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}\, r_{ee}^{20} = \sqrt{\frac{(5-\sqrt{5})(3-\sqrt{5})^2}{10}}\, r_{ee}^{20} = \sqrt{\frac{(5-\sqrt{5})(9+5-6\sqrt{5})}{10}}\, r_{ee}^{20} =$$

$$= \sqrt{\frac{(5-\sqrt{5})(14-6\sqrt{5})}{10}}\, r_{ee}^{20} = \sqrt{\frac{(5-\sqrt{5})(7-3\sqrt{5})}{5}}\, r_{ee}^{20} = \sqrt{\frac{35-7\sqrt{5}-15\sqrt{5}+15}{5}}\, r_{ee}^{20} =$$

$$= \sqrt{\frac{50-22\sqrt{5}}{5}}\, r_{ee}^{20} = \sqrt{\frac{2(25-11\sqrt{5})}{5}}\, r_{ee}^{20}$$

De donde se obtiene finalmente

$$q = \sqrt{\frac{2(25-11\sqrt{5})}{5}}\, r_{ee}^{20} \qquad (4)$$

d) La longitud de la arista de la cara pentagonal regular estrellada del poliedro estudiado, es igual al segmento $AC = l_5^{II}$ en la figura 1. Su valor se deduce de la fórmula

$$d_5 = \frac{\sqrt{5}+1}{2}\, l_5$$

que obtuvimos en el ejercicio G.P. 1.400-44 (6), siendo en este caso particular $l_5 = 2\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}\, r_{ee}^{20}$ (ver fórm. (2)), tendremos

$$l_5^{II} = d_5 = \frac{\sqrt{5}+1}{2}\, l_5 = \frac{\sqrt{5}+1}{2} \times 2\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}\, r_{ee}^{20} = \sqrt{\frac{(5-\sqrt{5})(\sqrt{5}+1)^2}{10}}\, r_{ee}^{20} =$$

$$= \sqrt{\frac{(5-\sqrt{5})(5+1+2\sqrt{5})}{10}}\, r_{ee}^{20} = \sqrt{\frac{(5-\sqrt{5})(6+2\sqrt{5})}{10}}\, r_{ee}^{20} = \sqrt{\frac{(5-\sqrt{5})(3+\sqrt{5})}{5}}\, r_{ee}^{20} =$$

$$= \sqrt{\frac{15-3\sqrt{5}+5\sqrt{5}-5}{5}}\, r_{ee}^{20} = \sqrt{\frac{10+2\sqrt{5}}{5}}\, r_{ee}^{20} = \sqrt{\frac{2(5+\sqrt{5})}{5}}\, r_{ee}^{20}$$

De donde se obtiene finalmente:

$$l_5^{II} = \sqrt{\frac{2x(5+\sqrt{5})}{5}}\; r_{ec}^{20} \qquad (5).$$

e) El ángulo $\widehat{CAD} = \alpha$ (fig. 1) de la cara poligonal estrellada del poliedro estudiado, tendrá una amplitud de

$$\alpha = \frac{360}{5} : 2 = 36^\circ \qquad (6)$$

por lo que el segmento "q" es el lado de un decágono regular inscrito en la circunferencia de radio "S_5^I"

A2) Obtención del dodecaedro regular estrellado por prolongación de las aristas de un dodecaedro regular convexo.

En efecto, los segmentos "q" (fig. 1) de las doce caras estrelladas del poliedro estudiado, forman en cada una de ellas un pentágono regular convexo, y el conjunto de todas, un dodecaedro regular convexo de arista $a_{12} = q$, que podemos denominar como "núcleo" del dodecaedro regular estrellado, estudiado en este ejercicio.

Así pues, prolongando las cinco aristas de cada cara de un dodecaedro regular convexo, se formarán doce pentágonos regulares estrellados de segunda especie, análogos a los de la figura 1, que son a su vez caras de un poliedro regular estrellado igual al estudiado en este ejercicio.

La longitud de la arista "a_{12}" del dodecaedro núcleo, será

pues (ver fórmula (4)):

$$d_{12} = q = \sqrt{\frac{2\times(25 - 11\sqrt{5})}{5}}\; r_{ec}^{20E} \qquad (7)$$

Terminado el estudio analítico de este poliedro estrellado, procedamos a su construcción, para lo cual son necesarias las siguientes piezas:

PIEZA Nº 1 DESARROLLO DE LAS PIRÁMIDES PENTAGONALES RECTAS, CUYAS CARAS LATERALES LIMITAN EL DODECAEDRO ESTRELLADO 12 unidades

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 1

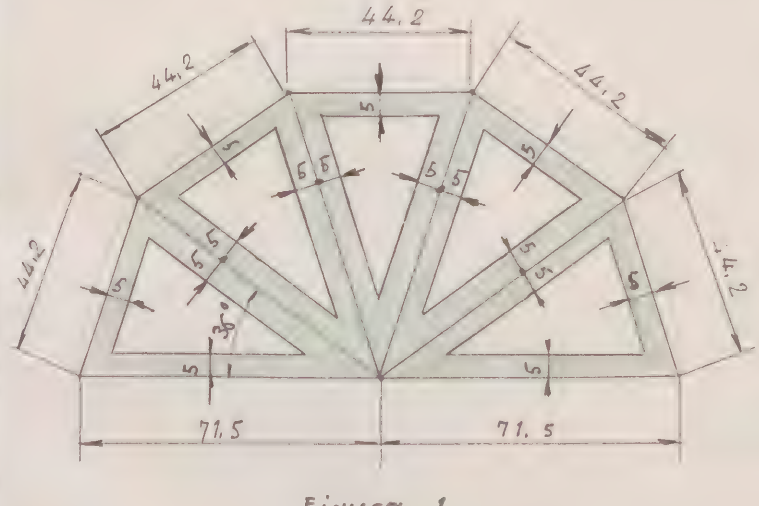


Figura 1

La longitud del lado igual en el triángulo isósceles, se obtiene de la fórmula (3)

$$S_5^{II} = 2\sqrt{\frac{5 - 2\sqrt{5}}{5}}\; r_{ec}^{20} =$$

$$\cong 0.64\,98\,39\,39\,3\ldots \times 110 \cong$$

$$\cong 71.5 \text{ mm}$$

La longitud de la base del triángulo anterior, se obtiene de la fórmula (4)

$$q = \sqrt{\frac{2\times(25 - 11\sqrt{5})}{5}}\; r_{ec}^{20} \cong 0,40\,15\,22\,83\,3\ldots \times 110 \cong 44.2 \text{ mm}$$

UNE A 4-210 x 297

Calvario Enero 1980

PIEZA Nº 2 UNIONES ARISTAS (LATERALES) 60 unidades

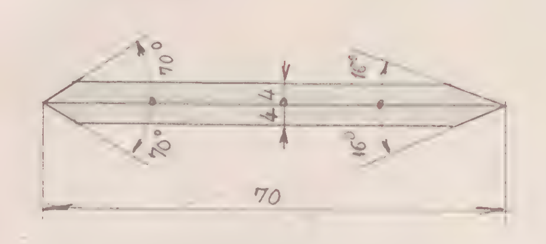


Figura 2

La forma y dimensiones se detallan en la figura 2

PIEZA Nº 2 60 (u)

Figura 2

PIEZA Nº 3 UNIONES ARISTAS (EN BASE) 30 unidades

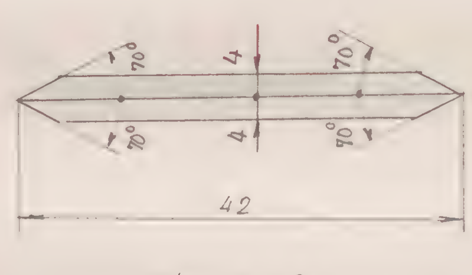


Figura 3

La forma y dimensiones se detallan en la figura 3

PIEZA Nº 3 30 (u)

Figura 3

PIEZA Nº 4 FORRO MACIZO DE LAS CARAS LATERALES 60 unidades

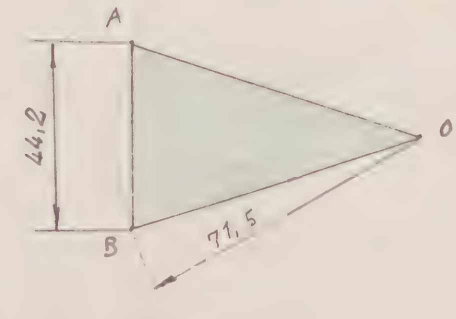


Figura 4

La forma y dimensiones se detallan en la figura 4

PIEZA Nº 4 60 (u)

Figura 4

[signature] Enero 1980

PIEZA Nº 5 REFUERZO CARAS LATERALES 60 unidades

La forma y dimensiones se representan en la figura 5, y se deducen de las del triángulo OAB, de la fig. 4.

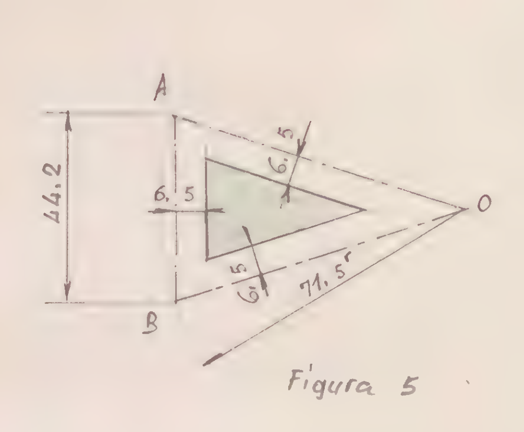


Figura 5

PIEZA Nº 5 60 (u)

Figura 5

PIEZA Nº 6 FORRO COLOREADO EN CARAS LATERALES 60 unidades

La forma y dimensiones se representan en la figura 6, y se deducen de las del triángulo OAB, de la figura 4

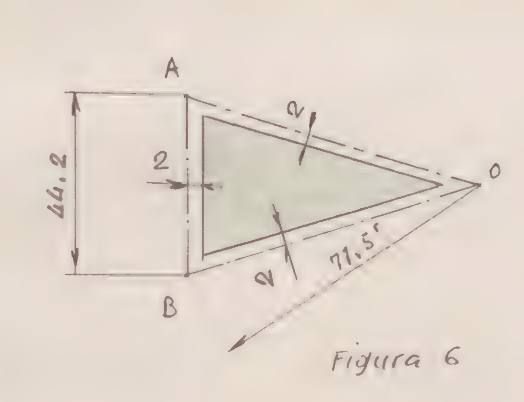


Figura 6

PIEZA Nº 6 60 (u)

Figura 6

		Modelo M- 49.1

ESTUDIO COMPLEMENTARIO

Del estudio anterior, se deduce la forma de obtención del modelo corpóreo del poliedro regular estrellado, cóncavo, de tercera especie, doce caras pentagonales estrelladas y doce vértices de ángulos pentaédricos. Los vértices externos del mismo, son a su vez vértices de las doce pirámides rectas pentagonales, equidistantes del centro "O" del poliedro.

Si unimos cada uno de los vértices anteriores, con los cinco más próximos que los rodean, los segmentos correspondientes son todos de igual longitud, y también aristas "a_{20}" de un icosaedro regular convexo inscrito en la esfera de radio "r_{ec}^{12E}" que es a su vez esfera circunscrita al poliedro estrellado.

La arista "a_{20}" de dicho icosaedro tiene por longitud (ver fórmula (2) hoja 4)

$$a_{20} = 2 \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}} \; r_{ec}^{20}$$

cuyo valor en el poliedro estudiado, será para $r_{ec}^{12E} = 110$ mm

$$a_{20} = 2 \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}} \times 110 \cong 1,05\ 14\ 62\ 22\ 4 \ldots \times 110 \cong 115,7 \text{ mm}$$

Para obtener el modelo corpóreo de este estudio complementario puede utilizarse este mismo modelo M-49.1, completándolo con las aristas $a_{20} = 115.7$ mm, que es lo realizado en el mismo.

Enero 1980

VARIANTE DEL MODELO CORPÓREO M-49.1

DE IGUAL FORMA, PERO DE MENOR RADIO EL

DE SU ESFERA CIRCUNSCRITA.

Radio de la esfera que pasa por los vértices exteriores:

$$r' = 76.1 \text{ mm.}$$

ENUNCIADO: Construir el modelo corpóreo del dodecaedro regular estrellado, cóncavo, de caras macizas, de tercera especie, formado por doce caras pentagonales estrelladas, y doce vértices de ángulos pentaédricos, concurriendo en cada uno de dichos ángulos, cinco caras del mismo.

Este modelo puede considerarse como una variante del modelo M-49.1 de igual forma y menor longitud en el radio "r_{ec}^{12E}" de su esfera circunscrita.

Para obtener el despiezo de este modelo, aplicaremos el estudio analítico hecho para el modelo M-49.1, determinando el coeficiente "k" de reducción. k = 76.1 : 110, o relación entre los radios correspondientes de sus respectivas esferas circunscritas:

DATO ÚNICO DEL EJERCICIO

$$r_{ec}^{12E} = 76,1 \text{ mm.}$$

COEFICIENTE DE REDUCCIÓN

$$k = \frac{76.1}{110} = 0,69\widehat{18}$$

A continuación presentamos diversas tablas de las longitudes, reseñadas en las figuras del modelo M-49.1, y de los valores

		Modelo M-49.2

correspondientes a aplicar en la construcción de este nuevo modelo M-49.2, en el que son necesarias las siguientes piezas:

PIEZA Nº 1 DESARROLLO DE LAS PIRÁMIDES PENTAGONALES, RECTAS, CUYAS CARAS LATERALES LIMITAN EL DODECAEDRO ESTUDIADO. 20 unidades

La figura 1, ha de construirse con las siguientes cotas modificadas.

FIGURA 1	Longitudes l en mm	Cotas modificadas mm
PIEZA Nº 1	71.5	49.5
	44.2	30.6
20 (u)	5	4

PIEZA Nº 2 UNIONES ARISTAS (LATERALES) 60 unidades

La figura 2, ha de construirse con las siguientes cotas:

FIGURA 2	Longitudes mm	Cotas modificadas mm
PIEZA Nº 2	70	48
	4	3
60 (u)	70°	70°
	16°	16°

		Modelo M-49.2

PIEZA Nº 3 UNIONES ARISTAS (EN BASE) 30 unidades

La figura 3, ha de construirse con las siguientes cotas modificadas

FIGURA 3	Longitudes mm	Cotas modificadas mm
PIEZA Nº 3	42	40
30 (u)	4	3
	70°	70°

PIEZA Nº 4 FORRO MACIZO DE LAS CARAS LATERALES

60 unidades

La figura 4, ha de construirse con las siguientes cotas modificadas

FIGURA 4	Longitudes mm	Cotas modificadas mm
PIEZA Nº 4	71,5	49,5
60 (u)	44,2	30,6

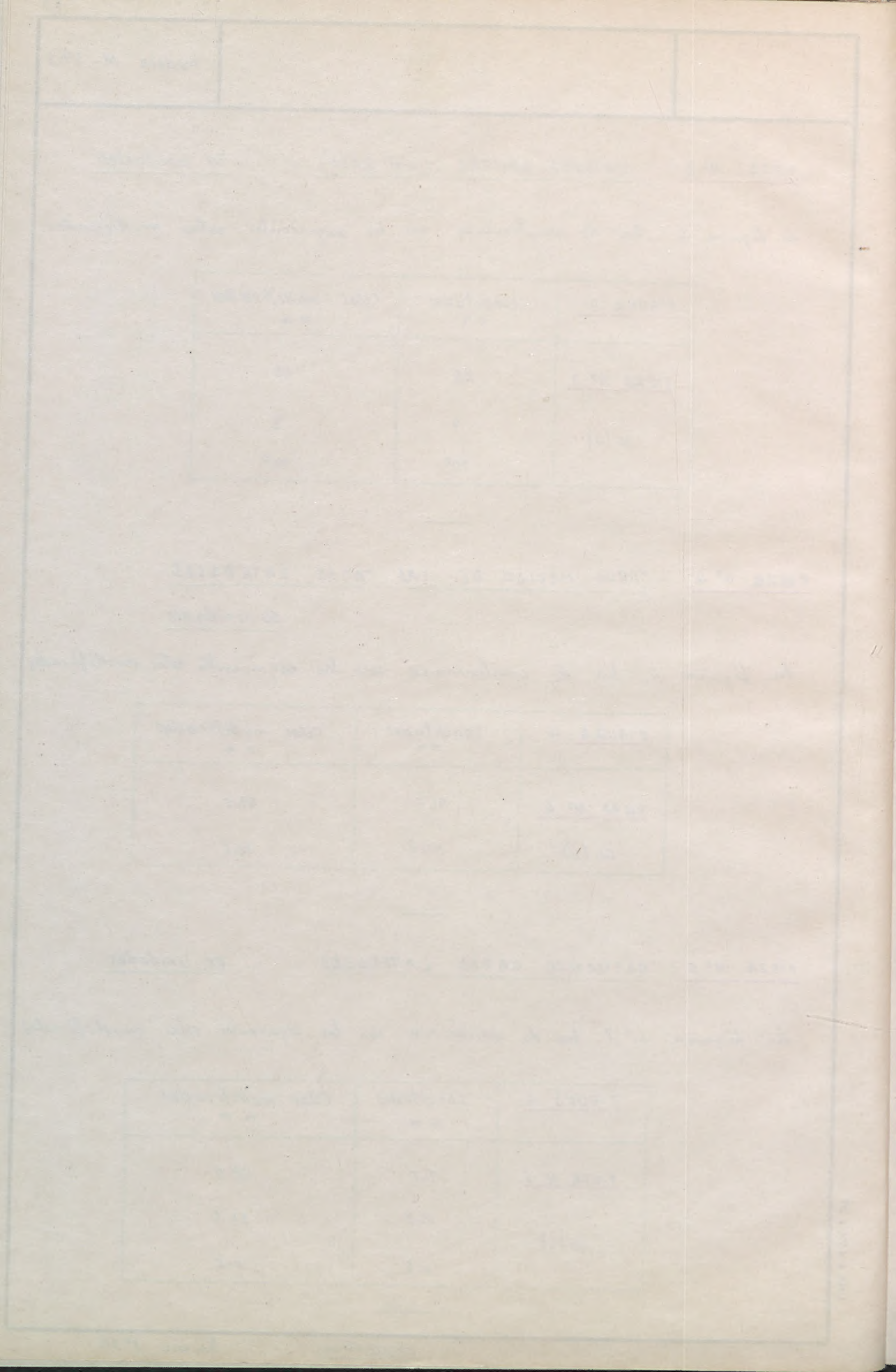
PIEZA Nº 5 REFUERZO CARAS LATERALES 60 unidades

La figura nº 5, ha de construirse con las siguientes cotas modificadas.

FIGURA 5	Longitudes mm	Cotas modificadas mm
PIEZA Nº 5	71,5	49.5
60 (u)	44,2	30.6
	6.5	5.5

UNE A 4-210 x 297

[signature] Enero 1980



Modelo M- 49.2

PIEZA Nº 6 FORRO COLOREADO EN CARAS LATERALES

60 unidades

La figura nº 6, ha de construirse con las siguientes cotas modificadas

FIGURA 6	Longitudes mm	cotas modificadas mm
PIEZA Nº 6	71. 5	49. 5
60 (u)	44.2	30. 6
	2	2

[signature] Enero 1980

colorchecker CLASSIC

calibrite

mm